

当 $n \geq 4$ 时, $a_n \geq 3a$, $b_n < 3a$, 故乙超市有可能被收购.

当 $n \geq 4$ 时, 令 $\frac{1}{2}a_n > b_n$, 则 $\frac{1}{2}a(n-1) > a \left[3 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \right]$,

整理得 $n > 7 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$,

当 $4 \leq n \leq 6$ 时, 不等式不成立,

又当 $n \geq 7$ 时, $0 < 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} < 1$, 故当 $n \in$

$\mathbf{N}_+$ 且 $n \geq 7$ 时, 必有 $n > 7 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$,

即第 7 年乙超市的年销售额不足甲超市的年销售额的 50%, 故至少在第 7 年乙超市将被甲超市收购.

专题 1 通项公式的求法

刷难关

1. C 【解析】由题得 $a_{n+1} - a_n = 2n - 1$, 则 $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = (2n-3) + (2n-5) + \cdots + 3 + 1 + 1 = \frac{(n-1)[(2n-3)+1]}{2} + 1 = n^2 - 2n + 2 (n \geq 2)$, 所以 $a_7 = 7^2 - 2 \times 7 + 2 = 37$.

多种解法 由题知 $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = 2n - 1$, 所以 $a_7 = (a_7 - a_6) + (a_6 - a_5) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 + 1 = 37$. 故选 C.

归纳总结 形如 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 型的递推数列 (其中 $f(n)$ 是关于 n 的函数) 可构造

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} = f(n-1), \\ a_{n-1} - a_{n-2} = f(n-2), \\ \dots \\ a_2 - a_1 = f(1), \end{cases}$$

将上述 $n-1$ 个式子两边分别相加, 可得 $a_n = f(n-1) + f(n-2) + \cdots + f(2) + f(1) + a_1 (n \geq 2)$.

- (1) 若 $f(n)$ 是关于 n 的一次函数, 累加后可转化为等差数列求和;
- (2) 若 $f(n)$ 是关于 n 的指数函数, 累加后可转化为等比数列求和;
- (3) 若 $f(n)$ 是关于 n 的二次函数, 累加后可分组求和;
- (4) 若 $f(n)$ 是关于 n 的分式函数, 累加后可裂项求和.

2. C 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 的首项为 2, 且 $a_{n+1} - a_n = 2^n$, 所以 $a_6 = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_6 - a_5) = 2 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^5 = 2 + \frac{2 \times (1-2^5)}{1-2} = 64$. 故选 C.

3. B 【解析】 $\because 3a_{n+1} = a_n \cdot 9^n, a_1 = 3$, $\therefore a_n \neq 0, \therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} \times 9^n$, $\therefore a_5 = \frac{a_5}{a_4} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = \frac{1}{3} \times 9^4 \times \frac{1}{3} \times 9^3 \times \frac{1}{3} \times 9^2 \times \frac{1}{3} \times 9^1 \times 3 = \left(\frac{1}{3} \right)^4 \times 9^{4+3+2+1} \times 3 = 3^{-4} \times (3^2)^{10} \times 3 = 3^{17}$. 故选 B.

4. A 【解析】因为正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 2$, 且 $n \left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) = \frac{2}{S_{n+1}}$, 所以 $\frac{n}{S_n} = \frac{n+2}{S_{n+1}}$, 则 $\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+2}{n}$, 所以 $\frac{S_2}{S_1} = \frac{3}{1}, \frac{S_3}{S_2} = \frac{4}{2}, \frac{S_4}{S_3} = \frac{5}{3}, \dots, \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+2}{n}$,

上述等式左、右两边分别相乘得 $\frac{S_{n+1}}{S_1} = \frac{3 \times 4 \times \cdots \times n \times (n+1)(n+2)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, 则 $S_{n+1} = \frac{S_1(n+1)(n+2)}{2} = (n+1)(n+2)$, 故当 $n \geq 2$ 且 $n \in \mathbf{N}_+$ 时, $S_n = n(n+1)$, 且当 $n=1$ 时, $S_1=2$ 满足 $S_n = n(n+1)$, 所以对任意的 $n \in \mathbf{N}_+$, $S_n = n(n+1)$, 故 $a_5 = S_5 - S_4 = 5 \times 6 - 4 \times 5 = 10$. 故选 A.

5. ACD 【解析】对于 A: 令 $n=1$, 得 $2a_1 = 1$, 则 $a_1 = \frac{1}{2}$, 故 A 正确; 对于 B: $S_n = 1 - a_n$, 当 $n \geq 2$ 时, 有 $S_{n-1} = 1 - a_{n-1}$, 两式相减, 得 $a_n = a_{n-1} - a_n, n \geq 2$, 整理得 $a_n = \frac{1}{2} a_{n-1}, n \geq 2$.

又 $a_1 = \frac{1}{2}$, 所以 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列,

则有 $a_n = \frac{1}{2^n}$, 易知 $\{a_n\}$ 是递减数列, 故 B 错误;

对于 C: 由 B 可知, $a_n = \frac{1}{2^n}$, 故 C 正确;

对于 D: 将 $a_n = \frac{1}{2^n}$ 代入 $S_n = 1 - a_n$, 可得 $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, 故 D 正确. 故选 ACD.

6. C 【解析】因为 $b_1 + 3b_2 + 7b_3 + \cdots + (2^n - 1)b_n = 2n$ ①, 所以当 $n=1$ 时, $b_1 = 2$; 当 $n \geq 2$ 时 $b_1 + 3b_2 + 7b_3 + \cdots + (2^{n-1} - 1)b_{n-1} = 2n - 2$ ②,

①-②得 $(2^n - 1)b_n = 2$, 所以 $b_n = \frac{2}{2^n - 1}$,

当 $n=1$ 时, $b_n = \frac{2}{2^n - 1}$ 也成立,

所以 $b_n = \frac{2}{2^n - 1}$, 所以 $b_5 = \frac{2}{31}$. 故选 C.

名师点拨 在处理同时包含 S_n 和 a_n 的条件时, 基本的思路是消一个留一个, 而具体消谁留谁取决于条件的关系中谁好消、消之后剩下的递推公式是否方便研究.

7. D 【解析】在数列 $\{a_n\}$ 中, 由 $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2$, 得 $a_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(a_n - 3)$, 而 $a_1 - 3 = 1$, 因此数列 $\{a_n - 3\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列, $a_n - 3 = 1 \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$, 即 $a_n = 3 + \frac{1}{3^{n-1}}$, 所以 $a_{100} = \frac{3^{100} + 1}{3^{99}}$. 故选 D.

归纳总结 类型一: 形如 $a_{n+1} = pa_n + q$ ($p \neq 0, p \neq 1$ 且 $q \neq 0$) 型的递推式. 数列 $\{a_n\}$ 为线性递推数列, 其通项公式可通过待定系数法构造等比数列来求. 设 $a_{n+1} + \lambda = p(a_n + \lambda)$, 展开移项整理得 $a_{n+1} = pa_n + (p-1)\lambda$, 与题设 $a_{n+1} = pa_n + q$ 比较系数 (待定系数法) 得 $\lambda = \frac{q}{p-1} (p \neq 0, p \neq 1, q \neq 0) \Rightarrow a_{n+1} + \frac{q}{p-1} = p \left(a_n + \frac{q}{p-1} \right) \Rightarrow a_n + \frac{q}{p-1} = p \left(a_{n-1} + \frac{q}{p-1} \right) (n \geq 2)$, 即数列 $\left\{ a_n + \frac{q}{p-1} \right\}$ 构成以 $a_1 + \frac{q}{p-1}$ 为首项, p 为公比的等比数列.

类型二: 形如 $a_{n+1} = pa_n + f(n)$ ($p \neq 0, p \neq 1$) 型的递推式. (1) 当 $f(n)$ 为一次函数类型 (即等差数列) 时, 设 $a_n + An + B = p[a_{n-1} + A(n-1) + B]$, 通过待定系数法确定 A, B 的值, 转化成以 $a_1 + A + B$ 为首项, p 为公比的等比数列 $\{a_n + An + B\}$, 再利用等比数列的通项公式求出 $\{a_n + An + B\}$ 的通项公式, 整理可得 a_n .

(2) 当 $f(n)$ 为指数函数类型 (即等比数列) 时, 设 $a_n + \lambda f(n) = p[a_{n-1} + \lambda f(n-1)]$, 通过待定系数法确定 λ 的值, 转化成以 $a_1 + \lambda f(1)$ 为首项, p 为公比的等比数列 $\{a_n + \lambda f(n)\}$, 再利用等比数列的通项公式求出 $\{a_n + \lambda f(n)\}$ 的通项公式, 整理可得 a_n .

8. BD 【解析】因为 $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{3a_n}{3+2a_n}$, 所以 $a_n \neq 0$, 所以 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3+2a_n}{3a_n} = \frac{1}{a_n} + \frac{2}{3}$, 又 $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{3}$, 所以 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 是以 $\frac{1}{3}$ 为首项, $\frac{2}{3}$ 为公差的等差数列, 则 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{3}(n-1) = \frac{2n-1}{3}$,

所以 $a_n = \frac{3}{2n-1}$, 所以 $a_2 = 1$, 所以 A, C 错误, B 正确;

易知 $a_n a_{n+1} = \frac{3}{2n-1} \cdot \frac{3}{2n+1} = \frac{9}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$, 所以 $S_n = \frac{9}{2} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] = \frac{9}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$.

$\frac{1}{2n+1} = \frac{9n}{2n+1}$, 所以 D 正确.
故选 BD.

归纳总结 形如 $a_{n+1} - a_n = pa_{n-1}a_n$ (p 为常数且 $p \neq 0, n \geq 2$) 的递推式, 两边同时除以 $a_{n-1}a_n$, 转化为 $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = p$ 的形式, 求出 $\frac{1}{a_n}$ 的表达式, 再求 a_n ;
还有形如 $a_{n+1} = \frac{ma_n}{pa_n+q}$ ($mpq \neq 0$) 的递推式, 也可采用取倒数的方法转化成 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{q}{m} + \frac{1}{a_n} + \frac{p}{m}$ 的形式, 构造等差数列求出 $\frac{1}{a_n}$ 的表达式, 再求 a_n .

9. ACD 【解析】对于 A 选项, 由已知等式变形可得 $a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1})$ ($n \geq 2$), 且 $a_2 - a_1 = 1$, 所以 $a_n - a_{n-1} \neq 0$,

所以 $\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = 2$ ($n \geq 2$), 所以数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 故 $a_{n+1} - a_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$, A 正确;

对于 B 选项, 由已知等式变形得 $a_{n+1} - 2a_n = a_n - 2a_{n-1}$ ($n \geq 2$), 且 $a_2 - 2a_1 = 0$, 所以 $a_{n+1} - 2a_n = 0$, 故数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 不是等比数列, B 错误;

对于 C 选项, 由 $\begin{cases} a_{n+1} - a_n = 2^{n-1} \\ a_{n+1} - 2a_n = 0 \end{cases}$, 可得 $a_n = 2^{n-1}$,

则 $\log_2 a_n = \log_2 2^{n-1} = n-1$, 所以数列 $\{\log_2 a_n\}$ 为等差数列, C 正确;

对于 D 选项, $S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots +$

$2^{n-1} = \frac{1 \times (1-2^n)}{1-2} = 2^n - 1 = 2a_n - 1$, 故 D 正确. 故选 ACD.

10. $n \cdot 2^n$ 【解析】 $\because a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}$,

$\therefore \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2a_n}{2^{n+1}} + \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}}$, 即 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + 1$.

又 $\frac{a_1}{2^1} = 1$,

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的

等差数列, $\therefore \frac{a_n}{2^n} = n$, $\therefore a_n = n \cdot 2^n$.

11. 210 【解析】因为 $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n + 2n +$

$2 = \frac{n+1}{n}a_n + 2(n+1)$,

所以 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + 2$, 即 $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 2$,

所以数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是首项为 3, 公差为 2 的等差数列,

所以 $\frac{a_n}{n} = 3 + 2(n-1) = 2n+1$,

则 $a_n = 2n^2 + n$, 则 $a_{10} = 2 \times 10^2 + 10 = 210$.

12. $10^{\frac{3-n}{2}}$ 【解析】对 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}$ 两边

同时取常用对数可得 $\lg a_n - \lg a_{n-1} =$

$\frac{1}{2}(\lg a_{n-1} - \lg a_{n-2})$. 令 $b_n = \lg a_{n+1} -$

$\lg a_n$, 则 $b_1 = \lg a_2 - \lg a_1 = 1$, $b_{n-1} = \lg a_n - \lg a_{n-1}$, 所以 $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$), 所以 $\lg a_{n+1} - \lg a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 故 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 10^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$.

由累乘法可得当 $n \geq 2$ 时, $\frac{a_n}{a_1} = 10 \times 10^{\frac{1}{2}} \times 10^{\frac{1}{4}} \times \dots \times 10^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} = 10^{\frac{2-\frac{1}{2^{n-1}}}{2}}$, 所以 $a_n = 10^{\frac{2-\frac{1}{2^{n-1}}}{2}}$ ($n \geq 2$), 又 $a_1 = 1$ 也符合此式, 所以 $a_n = 10^{\frac{2-\frac{1}{2^{n-1}}}{2}}$.

规律方法 形如 $a_{n+1} = ca_n^k$ ($k \neq 1, k \neq 0$) 的递推关系, 求其通项公式的方法当 $a_n > 0, c > 0$ 时, 对递推式两边取以 t ($t > 0$ 且 $t \neq 1$) 为底的对数, 得 $\log_t a_{n+1} = k \log_t a_n + \log_t c$, 视 $\log_t a_n$ 为一个整体, 即转化为 $\log_t a_{n+1} + \frac{\log_t c}{k-1} = k \left(\log_t a_n + \frac{\log_t c}{k-1} \right)$ (当 $c \neq 1$ 时, 可取 $t=c$ 简化运算), 从而求出 a_n .

13. 6 【解析】因为 $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$, 所以 $a_{n+1} + 1 = (a_n + 1)^2$, 所以 $\ln(a_{n+1} + 1) = 2 \ln(a_n + 1)$,

又 $a_1 + 1 = 2$, 所以 $\{\ln(a_n + 1)\}$ 是以 $\ln 2$ 为首项, 2 为公比的等比数列.

所以 $\ln(a_n + 1) = 2^{n-1} \ln 2$, 所以 $a_n = 2^{2^{n-1}} - 1$, 则 $\sqrt{a_n + 1} = \sqrt{2^{2^{n-1}}} > 2.025$, 则 n 最小正整数值为 6.

专题 2 数列求和

刷难关

1. B 【解析】 $a_n + S_n = 1$, 当 $n=1$ 时, $a_1 + S_1 = 1$, 故 $a_1 = \frac{1}{2}$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n + S_n = 1$, $a_{n-1} + S_{n-1} = 1$, 相减得 $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$, 由 $a_1 \neq 0$ 可知 $a_n \neq 0$,

故数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列,

故 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 即 $\frac{1}{a_n} = 2^n$,

所以 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_6} = 2 + 2^2 + \dots +$

$2^6 = \frac{2-2^6 \times 2}{1-2} = 2^7 - 2 = 126$. 故选 B.

归纳总结 公式法是数列求和最基本的方法, 可直接利用等差数列的前 n 项和公式 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$, 等比数列的前 n 项和公式

$S_n = \begin{cases} na_1, & q=1, \\ a_1 - a_n q = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1 \end{cases}$ 求和.

2. ABC 【解析】由等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 16$, 公差 $d = -4$, 可得 $a_n = 20 - 4n$. 设数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d' .

对于 A, 根据题意, 可得 $b_1 = a_1 = 16$,

$b_5 = a_2 = 12$, 所以 $d' = \frac{b_5 - b_1}{5-1} = \frac{12-16}{5-1} =$

-1 , 所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = b_1 + (n-1)d' = 17-n$, A 正确;

对于 B, $b_{29} = 17-29 = -12$, 令 $a_n = 20 - 4n = -12$, 解得 $n = 8$, B 正确;

对于 C, 令 $b_n = 17-n \geq 0$, 解得 $n \leq 17$, 所以当 $n=16$ 或 $n=17$ 时, S_n 取得最大值, C 正确;

对于 D, $S_n = \frac{n(16+17-n)}{2} = \frac{n(33-n)}{2}$,

可得 $\frac{S_n}{n} = \frac{33-n}{2} = \frac{33}{2} - \frac{1}{2}n$, 则 $\frac{S_n+1}{n+1} -$

$\frac{S_n}{n} = \left[\frac{33}{2} - \frac{1}{2}(n+1) \right] - \left(\frac{33}{2} - \frac{1}{2}n \right) =$

$-\frac{1}{2}$, 所以 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是公差为 $-\frac{1}{2}$ 的等差数列, D 错误. 故选 ABC.

3. C 【解析】因为等差数列 $\{a_n\}$ 满足

$a_{1013} = \frac{1}{2}$, 所以对于 $p, q \in \mathbb{N}_+$, 当 $p+q =$

2×1013 时, $a_p + a_q = 2a_{1013} = 1$,

则 $\frac{1}{4^p + 2} + \frac{1}{4^q + 2} = \frac{4^p + 4^q + 4}{4^p + 2 + 4^q + 2 + 4^p + 2 + 4^q + 2} =$

$\frac{4^p + 4^q + 4}{4 + 2 \cdot 4^p + 2 \cdot 4^q + 4} = \frac{1}{2}$,

设 $S_{2025} = \frac{1}{4^1 + 2} + \frac{1}{4^2 + 2} + \dots + \frac{1}{4^{2025} + 2}$, 则

$S_{2025} = \frac{1}{4^{2025} + 2} + \frac{1}{4^{2024} + 2} + \dots + \frac{1}{4^1 + 2}$,

两式相加可得 $2S_{2025} = 2025 \times \frac{1}{2}$, 解得

$S_{2025} = \frac{2025}{4}$. 故选 C.

规律方法 如果一个数列的前 n 项中, 距首末两项“等距离”的两项之和都相等, 那么可使用倒序相加法求数列的前 n 项和.

4. $\frac{89}{2}$ 【解析】 $\cos^2 n^\circ = \sin^2(90^\circ - n^\circ)$,

$S_{89} = \cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 89^\circ$, $S_{89} = \cos^2 89^\circ + \cos^2 88^\circ + \cos^2 87^\circ + \dots + \cos^2 1^\circ$.

$\therefore \cos^2 89^\circ = \sin^2 1^\circ$, $\cos^2 88^\circ = \sin^2 2^\circ$, $\cos^2 87^\circ = \sin^2 3^\circ, \dots, \cos^2 1^\circ = \sin^2 89^\circ$,

$\therefore 2S_{89} = (\cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ) + (\cos^2 2^\circ + \cos^2 88^\circ) + \dots + (\cos^2 89^\circ + \cos^2 1^\circ) =$

$$(\cos^2 1^\circ + \sin^2 1^\circ) + (\cos^2 2^\circ + \sin^2 2^\circ) + \cdots + (\cos^2 89^\circ + \sin^2 89^\circ) = 1 \times 89 = 89, \\ \therefore S_{89} = \frac{89}{2}.$$

5. D 【解析】在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3, a_2 = 6, a_{2n+1} = a_{2n} - 2 = 2a_{2n-1} - 2$, 则 $a_{2n+1} - 2 = 2(a_{2n-1} - 2)$, 则数列 $\{a_{2n-1} - 2\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, 于是 $a_{2n-1} - 2 = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$, 则 $a_{2n-1} = 2^{n-1} + 2, a_{2n-1} + a_{2n} = 3a_{2n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} + 6$, 则 $S_{20} = 3 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} + 60 = 3 \cdot 129$. 故选 D.

6. A 【解析】 $\because a_1 = 1, |a_2 - a_1| = 2^2$, 即 $|a_2 - 1| = 4$, $\therefore a_2 = 5$ 或 -3 , 又 $a_1 > a_2, \therefore a_2 = -3$. $\therefore$ 数列 $\{a_{2n-1}\}$ 为递增数列, 数列 $\{a_{2n}\}$ 为递减数列, $\therefore$ 当 n 为奇数时, $a_n \geq a_1 > 0$, 当 n 为偶数时, $a_n \leq a_2 < 0$, $\therefore a_n - a_{n-1} = (-1)^{n+1} \cdot n^2$. $\therefore a_{100} = (a_{100} - a_{99}) + (a_{99} - a_{98}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = -100^2 + 99^2 - 98^2 + 97^2 - 96^2 + 95^2 - \cdots - 2^2 + 1 = -(100^2 - 99^2) - (98^2 - 97^2) - (96^2 - 95^2) - \cdots - (2^2 - 1^2) = -(100 + 99 + 98 + 97 + 96 + \cdots + 3 + 2 + 1) = -\frac{100+1}{2} \times 100 = -5050$. 故选 A.

规律方法 若数列中相邻两项或几项的和是同一常数或有规律可循(如构成某个特殊数列), 则采用并项求和法进行数列求和比较简便.

$$7. \begin{cases} \frac{n(n+3)}{2}, n \text{ 为偶数}, \\ -\frac{n^2+3n+4}{2}, n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

【解析】由题可得 $T_n = -2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \cdots + (-1)^{n-1} n^2 + (-1)^n (n+1)^2$, 当 n 为偶数时, $T_n = -2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \cdots - n^2 + (n+1)^2 = 5 + 9 + \cdots + 2n + 1 = \frac{n}{2}(5+2n+1) = \frac{n(n+3)}{2}$;

当 n 为奇数时, $T_n = -2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \cdots + n^2 - (n+1)^2 = T_{n-1} + b_n = \frac{(n-1)(n+2)}{2} - (n+1)^2 = -\frac{n^2+3n+4}{2}$,

$$\text{所以 } T_n = \begin{cases} \frac{n(n+3)}{2}, n \text{ 为偶数}, \\ -\frac{n^2+3n+4}{2}, n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

8. A 【解析】 $a_{2n+1} = a_{2n} + 2^n = a_{2n-1} + (-1)^n + 2^n$, 即 $a_{2n+1} - a_{2n-1} = (-1)^n + 2^n$, 所以 $a_{2n+1} = (a_{2n-1} - a_{2n-3}) + (a_{2n-3} - a_{2n-5}) + \cdots + (a_3 - a_1) + a_1 = [(-1)^{n-1} + 2^{n-1}] + [(-1)^{n-2} + 2^{n-2}] + \cdots + (-1 + 2) + 1 = \frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} + \frac{-[1-(-1)^{n-1}]}{1-(-1)} + 1 = \frac{2^n-2}{1} - \frac{1-(-1)^{n-1}}{2} + 1$

$$= \frac{2^{n+1} + (-1)^{n-1} - 5}{2} + 1 = 2^n + \frac{(-1)^{n-1}}{2} - \frac{3}{2}.$$

$$\text{则 } a_{2n} = a_{2n-1} + (-1)^n = 2^n + \frac{(-1)^{n-1}}{2} - \frac{3}{2} + (-1)^n = 2^n + \frac{(-1)^n}{2} - \frac{3}{2}.$$

$$\frac{3}{2} + (-1)^n = 2^n + \frac{(-1)^n}{2} - \frac{3}{2}.$$

$$\text{故 } \{a_n\} \text{ 的前 } 100 \text{ 项和 } S_{100} = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{99}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{100}) \\ = \left[2 + \frac{(-1)^0}{2} - \frac{3}{2} + 2^2 + \frac{(-1)^1}{2} - \frac{3}{2} + \cdots + 2^{50} + \frac{(-1)^{49}}{2} - \frac{3}{2} \right] + \left[2 + \frac{(-1)^1}{2} - \frac{3}{2} + 2^2 + \frac{(-1)^2}{2} - \frac{3}{2} + \cdots + 2^{50} + \frac{(-1)^{50}}{2} - \frac{3}{2} \right] \\ = 2 \times \frac{2 \times (1-2^{50})}{1-2} - \frac{3}{2} \times 2 \times 50 = 2^{52} - 154.$$

故选 A.

9. 392 【解析】由 $a_{n+1} - b_n = n - 1$, 得 $a_{n+2} - b_{n+1} = n$, 即 $b_{n+1} = a_{n+2} - n$, 又 $a_n + b_{n+1} = 2n$, 所以 $a_n + a_{n+2} = 3n$, 同理得 $b_n + b_{n+2} = n + 3$.

由 $a_1 = b_1 = 1$ 得 $a_2 = b_2 = 1$. 令 $c_n = a_n - b_n$, 则 $c_1 = c_2 = 0$, 且 $c_n + c_{n+2} = 2n - 3$, 所以 $c_{n+1} + c_{n+3} = 2n - 1$, 所以 $c_n + c_{n+1} + c_{n+2} + c_{n+3} = 4n - 4$, 所以 $c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = 8$.

$$\text{则 } S_{30} = c_1 + c_2 + (c_3 + c_4 + c_5 + c_6) + (c_7 + c_8 + c_9 + c_{10}) + \cdots + (c_{27} + c_{28} + c_{29} + c_{30}) = 8 \times 7 + \frac{7 \times (7-1)}{2} \times 16 = 392.$$

规律方法 若一个数列是由若干个等差数列或等比数列或可求和的数列组成的, 则求和时可以用分组求和法, 分别求和后相加.

10. D 【解析】由“均倒数”的定义, 得

$$\frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \frac{1}{3n-1},$$

$\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 整理得 $S_n = n(3n-1) = 3n^2 - n$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (3n^2 - n) - [3(n-1)^2 - (n-1)] = 6n - 4$,

又 $a_1 = S_1 = 3 \times 1^2 - 1 = 2$, 满足 $a_1 = 6 \times 1 - 4 = 2$,

因此对所有 $n \in \mathbb{N}_+$, $a_n = 6n - 4$ 成立.

$$\text{由 } b_n = \frac{a_n+1}{3}, \text{ 得 } b_n = \frac{(6n-4)+1}{3} = 2n-1,$$

$$\text{则 } \frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\text{所以 } \frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \cdots + \frac{1}{b_{11} b_{12}} = \frac{1}{2} \times \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{21} - \frac{1}{23} \right) \right] = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{23} \right) = \frac{11}{23}.$$
 故选 D.

11. A 【解析】因为 $a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots +$

$$\frac{1}{n}a_n = 2 \cdot 3^{n+1} - 6 (n \in \mathbb{N}_+) \quad \text{①},$$

所以当 $n=1$ 时, $a_1 = 2 \times 3^2 - 6 = 12$,

所以当 $n \geq 2$ 时, $a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots +$

$$\frac{1}{n-1}a_{n-1} = 2 \cdot 3^n - 6 \quad \text{②},$$

$$\text{①}-\text{②} \text{ 得 } \frac{1}{n}a_n = 2 \cdot 3^{n+1} - 6 - (2 \cdot 3^n - 6) = 4 \cdot 3^n, \text{ 所以 } a_n = 4n \cdot 3^n,$$

当 $n=1$ 时, $a_1 = 12$ 也满足上式, 所以 $a_n = 4n \cdot 3^n$.

$$\text{所以 } b_n = \frac{4n \cdot 3^n}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{3^{n+1}}{2n+3} \cdot \frac{3^n}{2n+1},$$

记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,

$$\text{则 } S_{15} = \left(\frac{3^2}{5} - \frac{3}{3} \right) + \left(\frac{3^3}{7} - \frac{3^2}{5} \right) +$$

$$\left(\frac{3^4}{9} - \frac{3^3}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{3^{16}}{33} - \frac{3^{15}}{31} \right) = \frac{3^{16}}{33} - 1 =$$

$$\frac{3^{15}}{11} - 1. \text{ 故选 A.}$$

规律方法 若数列的通项公式可拆成结构相同的两式之差, 则数列的前 n 项和可用裂项相消法求解. 使用此方法时必须注意消去了哪些项, 保留了哪些项, 一般未被消去的项有前后对称的特点, 必要时可以多写出前后几项, 观察哪些项消去了, 哪些项保留了, 避免出错.

12. 【解】(1) 因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 所以可设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\{b_n\}$ 的公比为 q ,

由已知条件可得 $b_1 = a_2 = a_1 + d = 1 + d$,

$$a_4 = b_2 \Rightarrow b_1 q = 1 + 3d, 2a_5 = b_3 + 2 \Rightarrow 2 + 8d = b_1 q^2 + 2,$$

$$\text{则有 } \begin{cases} b_1 = 1 + d, \\ b_1 q = 1 + 3d, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} d = 1, \\ q = 2, \end{cases} \text{ 故 } a_n =$$

$$\begin{cases} b_1 q^2 = 8d, \\ b_1 = 2, \end{cases}$$

$$a_1 + (n-1) \times d = n, b_n = b_1 q^{n-1} = 2^n.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知 } c_n = \frac{\log_2 b_n^2 + 1}{a_n^2 a_{n+1}} =$$

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2},$$

$$\text{则 } S_n = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} -$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}. \text{ 因为 } n \in \mathbb{N}_+, \text{ 所}$$

$$\text{以 } \frac{1}{(n+1)^2} > 0, \text{ 故 } S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1.$$

$$\text{又由 } S_n - S_{n-1} = c_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} > 0 (n \geq$$

$$2), \text{ 得 } S_n > S_{n-1}, \text{ 即数列 } \{S_n\} \text{ 单调递}$$

$$\text{增, 故 } S_n \geq S_1 = \frac{3}{4}. \text{ 综上可得 } \frac{3}{4} \leq$$

$$S_n < 1.$$

13. BC 【解析】因为 $a_{n+1} - 2a_n = 2^{n+1}$, 所

以 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = 1$, 则 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是公差为 1,

首项为 $\frac{a_1}{2} = 1$ 的等差数列,

所以 $\frac{a_n}{2^n} = 1 + (n-1) = n$, 则 $a_n = n \cdot 2^n$.

对 A: $na_n = n^2 \cdot 2^n$, 因为 $\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n} = \frac{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}{n^2 \cdot 2^n} = \frac{2(n+1)^2}{n^2}$ 不是非零常数, 所以 $\{na_n\}$ 不是等比数列, 故 A 错误;

对 B: $\frac{a_n}{n} = 2^n$, 因为 $\frac{\frac{a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$, 所以

$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是以 $\frac{a_1}{1} = 2$ 为首项, 2 为公比的等比数列, 故 B 正确;

对 C: $a_n = n \cdot 2^n$, 故 C 正确;

对 D: 因为 $a_n = n \cdot 2^n$, 所以 $S_n = 2^1 + 2 \times 2^2 + \dots + n \cdot 2^n$, 所以 $2S_n = 2^2 + 2 \times 2^3 + \dots + n \cdot 2^{n+1}$,

两式相减得 $S_n = n \cdot 2^{n+1} - (2 + 2^2 + \dots + 2^n) = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$, 故 D 错误. 故选 BC.

规律方法 如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的, 那么这个数列的前 n 项和可用错位相减法求解.

14. (1) 【证明】因为 $a_{n+1} = a_n + 6a_{n-1} (n \geq 2)$, 所以 $a_{n+1} + 2a_n = 3(a_n + 2a_{n-1}) (n \geq 2)$, 因为 $a_1 = 5, a_2 = 5$, 所以 $a_2 + 2a_1 = 15$, 由以上递推关系可知, $a_{n+1} + 2a_n \neq 0$,

则 $\frac{a_{n+1} + 2a_n}{a_n + 2a_{n-1}} = 3 (n \geq 2)$,

故 $\{a_{n+1} + 2a_n\}$ 是以 15 为首项, 3 为公比的等比数列.

(2) 【解】由 (1) 可知, $a_{n+1} + 2a_n = 15 \times 3^{n-1} = 5 \times 3^n$,

因为 $b_n = a_n - 3^n$, 所以 $a_n = b_n + 3^n$,

则 $b_{n+1} + 3^{n+1} + 2(b_n + 3^n) = 5 \times 3^n$,

即 $b_{n+1} = -2b_n$.

因为 $b_1 = a_1 - 3 = 2$, 所以由以上递推关系可知, $b_n \neq 0$, 则 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = -2$,

则数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项, -2 为公比的等比数列,

故 $b_n = 2 \times (-2)^{n-1} = -(-2)^n$,

$a_n = 3^n - (-2)^n$.

(3) 【解】由 (2) 可知, $a_n = 3^n - (-2)^n$, 则 $3^n c_n = n(3^n - a_n) = n(-2)^n$, 得 $c_n =$

$n \left(-\frac{2}{3}\right)^n$, 则 $|c_n| = n \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

设 $S_n = |c_1| + |c_2| + \dots + |c_n|$,

则 $S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^1 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots +$

$n \left(\frac{2}{3}\right)^n$,

得 $\frac{2}{3} S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots +$

$n \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$,

所以 $\frac{1}{3} S_n = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots +$

$\left(\frac{2}{3}\right)^n - n \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \frac{\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} -$

$n \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 2 - (3+n) \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$,

则 $|c_1| + |c_2| + \dots + |c_n| = S_n = 6 - 3(3+n)$

$n \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

15. A 【解析】将数列分组: 第一组有一项, 是 2^0 , 和为 2^0 ;

第二组有两项是 $2^0, 2^1$, 其和为 $2^0 + 2^1$, 依此类推, 第 n 组有 n 项, 是 $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$, 其和为 $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} =$

$\frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$, 则前 63 组共有

$\frac{63 \times (1+63)}{2} = 2016$ (项), $\therefore S_{2022} =$

$(2^1-1) + (2^2-1) + \dots + (2^{63}-1) + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{63} - 63 + \frac{1-2^6}{1-2} = \frac{2(1-2^{63})}{1-2} - 63 + 63 = 2^{64} - 2$, 故选 A.

16. $\frac{8(10^{n+1}-9n-10)}{81} (n \in \mathbf{N}_+)$ 【解析】记

$8, 88, 888, \dots, \underbrace{8 \cdots 8}_{n \text{ 个 } 8}$ 为数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n ,

因为 $a_1 = 8 = \frac{8}{9} \times (10-1)$,

$a_2 = 88 = \frac{8}{9} \times (10^2-1)$,

$a_3 = 888 = \frac{8}{9} \times (10^3-1)$,

$a_4 = 8888 = \frac{8}{9} \times (10^4-1)$,

.....

所以该数列的一个通项公式为 $a_n = \frac{8}{9} \times (10^n-1) (n \in \mathbf{N}_+)$,

所以 $S_n = \frac{8}{9} \times [(10-1) + (10^2-1) +$

$(10^3-1) + \dots + (10^n-1)]$

$= \frac{8}{9} \times (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n - n)$

$= \frac{8}{9} \times \left[\frac{10(1-10^n)}{1-10} - n \right]$

$= \frac{8(10^{n+1}-9n-10)}{81} (n \in \mathbf{N}_+)$.

17. B 【解析】易知函数 $y = x + \frac{81}{x}$ 在 $(0, 9)$ 上单调递减, 在 $[9, +\infty)$ 上单调递增,

所以对于 $a_n = n + \frac{81}{n}$ 且 $n \in \mathbf{N}_+$,

有 $a_1 > a_2 > \dots > a_8 > a_9 < a_{10} < \dots$,

故 $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{80} - a_{81}| =$

$a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \dots + a_8 - a_9 + a_{10} - a_9 + a_{11} -$

$a_{10} + \dots + a_{81} - a_{80} = a_1 - 2a_9 + a_{81} = 82 - 2 \times 18 + 82 = 128$. 故选 B.

18. 【解】(1) 由 $a_1 = \frac{1}{31}, a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+1}$ 可

敲黑板: 观察到递推公式的分母含通项 a_n , 通过倒数关系加以转化

得 $a_n \neq 0$, 且 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2$,

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 -31 为首项, 2 为公差的等差数列.

所以 $\frac{1}{a_n} = -31 + (n-1) \cdot 2 = 2n-33$,

所以 $a_n = \frac{1}{2n-33}$.

(2) 由 (1) 得, $a_n \cdot a_{n+1} = \frac{1}{2n-33} \cdot$

$\frac{1}{2n-31} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-33} - \frac{1}{2n-31} \right)$,

所以 $T_n = \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{1}{31} + \frac{1}{29} \right) + \right.$

$\left(-\frac{1}{29} + \frac{1}{27} \right) + \left(-\frac{1}{27} + \frac{1}{25} \right) + \dots +$

$\left(\frac{1}{2n-33} - \frac{1}{2n-31} \right) \left. \right]$

$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{31} - \frac{1}{2n-31} \right)$.

(3) 由 (1) 得数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 -31 为首项, 2 为公差的等差数列, 所以

$S_n = -31n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 - 32n$,

所以 $\frac{S_n}{n} = n-32$,

所以 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = n+1-32 - (n-32) = 1$,

所以数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是以 -31 为首项, 1 为

公差的等差数列. 设数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和为 Q_n ,

则 $Q_n = \frac{n(-31+n-32)}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{63}{2}n$.

令 $\frac{S_n}{n} = n-32 \leq 0$, 解得 $n \leq 32$,

所以当 $n \leq 32$ 时, $H_n = - \left(\frac{S_1}{1} + \right.$

$\frac{S_2}{2} + \dots + \frac{S_n}{n} \left. \right) = -Q_n = -\frac{1}{2}n^2 + \frac{63}{2}n$;

当 $n \geq 33$ 时, $H_n = - \left(\frac{S_1}{1} + \frac{S_2}{2} + \dots + \right.$

$\frac{S_{32}}{32} \left. \right) + \frac{S_{33}}{33} + \frac{S_{34}}{34} + \dots + \frac{S_n}{n} = Q_n - 2Q_{32} =$

$\frac{1}{2}n^2 - \frac{63}{2}n + 992$.

综上, $H_n = \begin{cases} -\frac{1}{2}n^2 + \frac{63}{2}n, & n \leq 32, \\ \frac{1}{2}n^2 - \frac{63}{2}n + 992, & n \geq 33. \end{cases}$

专题3 数列放缩求和

刷难关

1. (1) 【证明】因为 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 所以

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}.$$

$$\text{又 } a_{n+1} = 3a_n + 2^{n+1},$$

$$\text{所以 } b_{n+1} = \frac{3a_n + 2^{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3a_n}{2^{n+1}} + 1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + 1.$$

$$\frac{a_n}{2^n} + 1 = \frac{3}{2} b_n + 1,$$

$$\text{故 } b_{n+1} + 2 = \frac{3}{2} b_n + 3 = \frac{3}{2} (b_n + 2).$$

$$\text{又 } b_1 = \frac{a_1}{2^1} = \frac{2}{2} = 1, \text{ 所以 } b_1 + 2 = 3 \neq 0,$$

所以 $b_n + 2 \neq 0$,

因此数列 $\{b_n + 2\}$ 是首项为 3, 公比为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列.

$$(2) \text{【解】由 (1) 得 } b_n + 2 = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \frac{3^n}{2^{n-1}}, \text{ 所以 } b_n = \frac{3^n}{2^{n-1}} - 2.$$

$$\text{又因为 } b_n = \frac{a_n}{2^n},$$

$$\text{所以 } a_n = 2^n \cdot b_n = 2^n \left(\frac{3^n}{2^{n-1}} - 2 \right) = 2 \cdot 3^n - 2^{n+1}, \text{ 即数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = 2(3^n - 2^n).$$

$$(3) \text{【证明】由 (2) 得 } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2(3^n - 2^n)},$$

因为 $2^n < 3^{n-1}$ 对任意 $n \geq 3$ 恒成立, 所以 $3^n - 2^n > 3^n - 3^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}, n \geq 3$,

$$\text{所以 } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2(3^n - 2^n)} < \frac{1}{2 \times 2 \times 3^{n-1}} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, n \geq 3,$$

$$\text{故当 } n=1 \text{ 时, } S_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2} < \frac{3}{4};$$

$$\text{当 } n=2 \text{ 时, } S_2 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{3}{5} < \frac{3}{4};$$

$$\text{当 } n \geq 3 \text{ 时, } S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} <$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{\frac{1}{3^2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \right]}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{1}{24} - \frac{1}{24} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

$$= \frac{77}{120} - \frac{1}{24} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2},$$

$$\text{因为 } \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} > 0, \text{ 所以 } \frac{77}{120} - \frac{1}{24} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} < \frac{77}{120} < \frac{3}{4}. \text{ 综上所述, } S_n < \frac{3}{4}.$$

2. (1) 【解】依题意, 当 $n=1$ 时, $2S_1 = a_2 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$, 又 $S_1 = a_1 = 1$, 所以 $a_2 = 4$.

(2) 【解】当 $n \geq 2$ 时, $2S_n = na_{n+1} - \frac{1}{3}n^3 - n^2 - \frac{2}{3}n$, $2S_{n-1} = (n-1)a_n -$

$$\frac{1}{3}(n-1)^3 - (n-1)^2 - \frac{2}{3}(n-1),$$

$$\text{两式相减得 } 2a_n = na_{n+1} - (n-1)a_n -$$

$$\frac{1}{3}(3n^2 - 3n + 1) - (2n-1) - \frac{2}{3},$$

$$\text{整理得 } (n+1)a_n = na_{n+1} - n(n+1), \text{ 即}$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 1, \text{ 又 } \frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{1} = 1,$$

所以数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是首项为 $\frac{a_1}{1} = 1$, 公差为 1 的等差数列,

$$\text{所以 } \frac{a_n}{n} = 1 + (n-1) \times 1 = n, \text{ 所以 } a_n = n^2.$$

$$(3) \text{【证明】当 } n=1 \text{ 时, } \frac{1}{a_1} = 1 < \frac{7}{4};$$

$$\text{当 } n=2 \text{ 时, } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} < \frac{7}{4};$$

$$\text{当 } n \geq 3 \text{ 时, } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n},$$

$$\text{此时 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots +$$

$$\frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots +$$

$$\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{7}{4} - \frac{1}{n} < \frac{7}{4}.$$

综上, 对一切正整数 n , 有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots +$

$$\frac{1}{a_n} < \frac{7}{4}.$$

$$\text{名师点拨 } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} -$$

$$\frac{1}{n}, \text{ 这个放缩显然越靠前放缩得越多,}$$

为了更精确, 需要保留前面部分项. 本题保留了前 2 项, 其中第 1 项无法按此式放缩, 第 2 项是人为保留, 为了更精确.

分母缩小时, 在保证可以裂项的前提下少缩小一点, 可以提高精确度.

$$\text{多种解法 } (3) \frac{1}{a_1} = 1, \frac{1}{a_2} = \frac{1}{4},$$

$$\text{当 } n \geq 3 \text{ 时, } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2 - 1} =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} \right),$$

$$\text{故 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} <$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \right.$$

$$\left. \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) < \frac{5}{4} +$$

$$\frac{5}{12} = \frac{5}{3} < \frac{7}{4}.$$

3. 【解】(1) 因为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为

$$S_n, \text{ 且 } S_n = 2a_n - 2^{n+1},$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = S_1 = 2a_1 - 4, \text{ 则 } a_1 = 4,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, 由 } S_n = 2a_n - 2^{n+1} \text{ 可得}$$

$$S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2^n,$$

$$\text{上述两个等式作差可得 } a_n = 2a_{n-1} -$$

$$2a_{n-1} - 2^n, \text{ 所以 } a_n - 2a_{n-1} = 2^n,$$

$$\text{等式 } a_n - 2a_{n-1} = 2^n \text{ 两边同时除以 } 2^n \text{ 可}$$

$$\text{得 } \frac{a_n}{2^n} - \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} = 1, \text{ 所以数列 } \left\{ \frac{a_n}{2^n} \right\} \text{ 是以}$$

$$\frac{a_1}{2} = 2 \text{ 为首项, } 1 \text{ 为公差的等差数列,}$$

$$\text{故 } \frac{a_n}{2^n} = 2 + (n-1) = n+1, \text{ 所以 } a_n = (n+1) \cdot 2^n.$$

$$(2) \text{由 (1) 知 } a_n = (n+1) \cdot 2^n, \text{ 则}$$

$$b_n = \frac{(n+3) \cdot 2^{n-1}}{a_n a_{n+1}}$$

$$= \frac{(n+3) \cdot 2^{n-1}}{(n+1)2^n \cdot (n+2)2^{n+1}}$$

$$= \frac{n+3}{(n+1)(n+2) \cdot 2^{n+2}}$$

$$= \frac{2(n+2) - (n+1)}{(n+1)(n+2) \cdot 2^{n+2}}$$

$$= \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} - \frac{1}{(n+2)2^{n+2}},$$

$$\text{所以 } T_n = \left(\frac{1}{2 \times 2^2} - \frac{1}{3 \times 2^3} \right) + \left(\frac{1}{3 \times 2^3} - \right.$$

$$\left. \frac{1}{4 \times 2^4} \right) + \cdots + \left[\frac{1}{(n+1)2^{n+1}} - \frac{1}{(n+2)2^{n+2}} \right] =$$

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{(n+2)2^{n+2}}.$$

$$\text{故数列 } \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } T_n = \frac{1}{8} -$$

$$\frac{1}{(n+2) \cdot 2^{n+2}}.$$

$$(3) \text{由 (1) 知 } a_n = (n+1) \cdot 2^n, \text{ 则 } c_n =$$

$$\log_2 \frac{a_n}{n+1} = \log_2 2^n = n, \text{ 因为 } \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} <$$

$$\frac{1}{\sqrt{c_k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{c_k}} < \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}},$$

悟: 等价变形后放缩, 为后续裂项相消打下基础

$$\text{所以 } 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k} -$$

$$\sqrt{k-1}),$$

$$\text{则 } \sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt{c_k}} > 2[(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} -$$

$$\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{2026} - \sqrt{2025})] =$$

$$2(\sqrt{2026} - 1) > 2(\sqrt{2025} - 1) = 88,$$

$$\sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt{c_k}} < 1 + 2[(-1 + \sqrt{2}) + (-\sqrt{2} +$$

$$\sqrt{3}) + \cdots + (-\sqrt{2024} + \sqrt{2025})] = 1 +$$

$$2(\sqrt{2025} - 1) = 89, \text{ 所以 } 88 < \sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt{c_k}} < 89, \text{ 故}$$

$$\left[\sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt{c_k}} \right] = 88.$$

专题4 数列与其他知识的综合

刷难关

1. B 【解析】由 $a_n + S_n = 1\ 000$ ①, 可得
当 $n=1$ 时, $a_1 + S_1 = 1\ 000$, 即 $a_1 = 500$;
当 $n \geq 2$ 时, $a_{n-1} + S_{n-1} = 1\ 000$ ②, 由 ①-

②得 $a_n - a_{n-1} + a_n = 0$, 即 $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$,

故数列 $\{a_n\}$ 是首项为 500, 公比为 $\frac{1}{2}$

的等比数列, 故 $a_n = 500 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

则 $T_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = 500^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+\cdots+n-1} = 500^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$,

由 $\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{500^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{500^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}} = 500 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 因为 $n \in \mathbf{N}_+$, 所以当 $1 \leq n \leq 8$

时, $T_{n+1} > T_n$, 当 $n \geq 9$ 时, $T_{n+1} < T_n$, 故使 T_n 取得最大值时 n 的值为 9. 故选 B.

2. $\left(-\infty, \frac{29}{32}\right)$ 【解析】因为 $S_n = 2a_n - 2^{n+1}$ ①, 所以当 $n=1$ 时, $S_1 = a_1 = 2a_1 - 2^2$, 解得 $a_1 = 4$,

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2^n$ ②, ①-②得 $S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2^{n+1} - (2a_{n-1} - 2^n)$,

化简得 $a_n - 2a_{n-1} = 2^n$, 变形得 $\frac{a_n}{2^n} - \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} = 1$.

因为 $\frac{a_1}{2} = \frac{4}{2} = 2$, 所以数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是以 2 为首项, 1 为公差的等差数列,

所以 $\frac{a_n}{2^n} = 2 + (n-1) = n+1$, 解得 $a_n = (n+1) \cdot 2^n$,

所以不等式 $2n^2 - 5n - 7 < (1-\lambda)a_n$ 可化为 $(2n-7)(n+1) < (1-\lambda)(n+1) \cdot 2^n$,

化简得 $1-\lambda > \frac{2n-7}{2^n}$,

要使不等式 $2n^2 - 5n - 7 < (1-\lambda)a_n$ 对于 $n \in \mathbf{N}_+$ 恒成立, 即 $1-\lambda > \frac{2n-7}{2^n}$ 对于 $n \in \mathbf{N}_+$ 恒成立.

设 $f(n) = \frac{2n-7}{2^n}$ ($n \in \mathbf{N}_+$), 当不等式 $1-\lambda > \frac{2n-7}{2^n}$ 对于 $n \in \mathbf{N}_+$ 恒成立时, $1-\lambda > f(n)_{\max}$,

$f(n) - f(n+1) = \frac{2n-7}{2^n} - \frac{2(n+1)-7}{2^{n+1}} = \frac{2n-9}{2^{n+1}}$,

则当 $n \geq 5$ 时, $f(n) - f(n+1) > 0$, 即 $f(n) > f(n+1)$, 则 $f(5) > f(6) > f(7) > \cdots$,

当 $n \leq 4$ 时, $f(n) - f(n+1) < 0$, 即 $f(n) < f(n+1)$,

则 $f(1) < f(2) < f(3) < f(4) < f(5)$,

则 $f(n)$ 的最大值为 $f(5)$,

因为 $f(5) = \frac{2 \times 5 - 7}{2^5} = \frac{3}{32}$,

所以 $1-\lambda > \frac{3}{32}$, 解得 $\lambda < \frac{29}{32}$,

即实数 λ 的取值范围为 $\left(-\infty, \frac{29}{32}\right)$.

3. 【解】(1) 由条件可知, $a_2 = 3a_1 + 1 = 7$,

当 n 为偶数时, $a_{n+1} = 2a_{n-1}$, 所以数列

$\{a_n\}$ 的奇数项是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $a_{2n-1} = a_1 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, 所以当 n 为奇数时, $a_n = 2^{\frac{n+1}{2}}$;

当 n 为偶数时, $a_n = 3a_{n-1} + 1 = 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}} + 1$,

所以 $a_n = \begin{cases} 2^{\frac{n+1}{2}}, & n \text{ 为奇数}, \\ 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}} + 1, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$

(2) 当 n 为偶数时, $S_n = 2 + (3 \times 2 + 1) + 4 + (3 \times 2^2 + 1) + \cdots + 2^{\frac{n}{2}} + (3 \times 2^{\frac{n}{2}-1} + 1)$

$= (2 + 4 + \cdots + 2^{\frac{n}{2}}) + 3 \times (2 + 2^2 + \cdots + 2^{\frac{n}{2}-1}) + \frac{n}{2}$

$= 4 \times \frac{2 \times (1 - 2^{\frac{n}{2}})}{1 - 2} + \frac{n}{2} = 2^{\frac{n}{2}+3} - 8 + \frac{n}{2}$;

当 n 为奇数时, $S_n = 2 + (3 \times 2 + 1) + 4 + (3 \times 2^2 + 1) + \cdots + (3 \times 2^{\frac{n-1}{2}} + 1) + 2^{\frac{n+1}{2}}$

$= (2 + 4 + \cdots + 2^{\frac{n+1}{2}}) + 3 \times (2 + 2^2 + \cdots + 2^{\frac{n-1}{2}-1}) + \frac{n-1}{2}$

$= \frac{2 \times (1 - 2^{\frac{n+1}{2}})}{1 - 2} + 3 \times \frac{2 \times (1 - 2^{\frac{n-1}{2}})}{1 - 2} + \frac{n-1}{2}$

$= 5 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} - 8 + \frac{n-1}{2}$,

所以 $S_n = \begin{cases} 5 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} - 8 + \frac{n-1}{2}, & n \text{ 为奇数}, \\ 2^{\frac{n}{2}+3} - 8 + \frac{n}{2}, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$

(3) 由(1)知 $b_n = \begin{cases} 2^{\frac{n+1}{2}}, & n \text{ 为奇数}, \\ 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}} + 2^{-n}, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$

所以当 n 为奇数时, 数列 $\{b_n\}$ 单调递减, 当 n 为偶数时, 数列 $\{b_n\}$ 单调递减,

$b_1 = 1, b_2 = \frac{7}{4}, b_3 = \frac{1}{2}, b_4 = \frac{13}{16}$,

$b_5 = \frac{1}{4}, b_6 = \frac{25}{64}$,

点悟: 要写出 b_6 的值, 比较其与 b_3 的大小, 会影响到 λ 的范围

若集合 $M = \{n | b_n \geq \lambda\}$ 中恰好有 3 个元素, 则这三个元素为 1, 2, 4, 则实数

λ 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{13}{16}\right]$.

4. ACD 【解析】 $\because a_n + a_{n+1} = (-1)^{n+1}$,

$\therefore \frac{a_n}{(-1)^{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}} = 1$, 即 $\frac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}} =$

$1 - \frac{a_n}{(-1)^{n+1}}$, 又 $\frac{a_1}{-1} = 3$, $\therefore$ 数列

$\left\{\frac{a_n}{(-1)^n}\right\}$ 是首项为 3, 公差为 1 的等差

数列, 即 $\frac{a_n}{(-1)^n} = n + 2$,

$\therefore a_n = (-1)^n(n+2)$.

对于选项 A: $a_{10} = (-1)^{10} \times (10+2) = 12$, 故 A 正确.

对于选项 B: $S_{12} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{11} + a_{12}) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$, 故 B 错误.

对于选项 C: 显然 n 为奇数时, a_n 为奇数, n 为偶数时, a_n 为偶数, 若要满足

$\{a_n\}$ 的两项之和为奇数, 则应从 $\{a_n\}$ 的奇数项和偶数项中各取一个, 所以

$P_n = \frac{C_n^1 \cdot C_n^1}{C_{2n}^1} = \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n-1} >$

$\frac{1}{2}$, 故 C 正确.

对于选项 D: 当 $n=1$ 时, $T_1 = P_1 = 1$, 满足 $T_n \leq \frac{n}{2^{n-1}}$; 当 $n \geq 2$ 时, $P_n = \frac{n}{2n-1} <$

$\frac{n}{2n-2} = \frac{n}{2(n-1)}$,

所以 $T_n = P_1 P_2 \cdots P_n \leq 1 \cdot \frac{2}{2 \cdot 1} \cdot \frac{3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{4}{2 \cdot 3} \cdots \frac{n}{2(n-1)} = \frac{n}{2^{n-1}}$, 故 D 正

确. 故选 ACD.

5. ABD 【解析】由题意可知, 要使得 n 次传球后球在甲手中, 则第 $(n-1)$ 次传球后球必定不在甲手中,

所以 $P_n = \frac{1}{2}(1 - P_{n-1})$, $n \geq 2$,

即 $P_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(P_{n-1} - \frac{1}{3}\right)$,

因为 $P_1 = 0$, 所以 $P_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$, 所以

$P_n - \frac{1}{3} \neq 0$, 所以 $\frac{P_n - \frac{1}{3}}{P_{n-1} - \frac{1}{3}} = -\frac{1}{2}$,

则数列 $\left\{P_n - \frac{1}{3}\right\}$ 是以 $-\frac{1}{3}$ 为首项,

$-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列, 故 B 正确;

所以 $P_n - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 即

$P_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

对于 A, $P_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 故

A 正确;

对于 C, 由 $P_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}$, 可得 $P_1 = \frac{2}{3} \neq 0$, 故 C 错误;

对于 D, 若第 4 次传球后球在甲手中, 则第 3 次传球后球必不在甲手中, 设甲、乙、丙分别对应 a, b, c , 则不同的传球方式有: ① $a \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow a$, ② $a \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow a$, ③ $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow a$, ④ $a \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow a$, ⑤ $a \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow a$, ⑥ $a \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$, 故共有 6 种情况, 故 D 正确. 故选 ABD.

6. ABD

思路导引 根据题意, 由全概率公式可得 p_{n+1} 和 p_n 的关系, 代入即可求出 p_2 , 判断 A; 若第 n 次分类正确, 则第 $n+2$ 次分类正确包含两种情况: 第 $n+1$ 次分类正确且第 $n+2$ 次分类正确, 第 $n+1$ 次分类错误且第 $n+2$ 次分类正确, 利用条件概率求出

$P(A_{n+2}|A_n)$, 即可判断 B; 根据 p_{n+1} 和 p_n 的关系, 利用构造法即可判断 C; 结合 C 即可得到数列 $\{p_n\}$ 的通项公式, 再进行分组求和即可.

【解析】 由已知, 得第 $(n+1)$ 次分类正确的概率为 $p_{n+1} = P(A_{n+1}|A_n)p_n + P(A_{n+1}|\bar{A}_n)(1-p_n) = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}(1-p_n) = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$.

对于 A, $p_2 = \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$, 故 A 正确;

对于 B, $P(A_{n+2}|A_n) = P(A_{n+1}|A_n)P(A_{n+2}|A_{n+1}) + P(\bar{A}_{n+1}|A_n)P(A_{n+2}|\bar{A}_{n+1}) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$, 故 B 正确;

对于 C, 由 $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$, 得 $p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}(p_n - \frac{1}{2})$, 又 $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, 所以 $\{p_n - \frac{1}{2}\}$ 是首项为 $\frac{1}{4}$, 公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列, 且 $p_2 = \frac{7}{12}$, $p_3 = \frac{19}{36}$, 不满足 $(p_2 + \frac{1}{2})^2 = (p_1 + \frac{1}{2}) \cdot (p_3 + \frac{1}{2})$, 则 $\{p_n + \frac{1}{2}\}$ 不是等比数列, 故 C 错误;

对于 D, 由 C 项知, $p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{4 \times 3^{n-1}}$, 则 $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4 \times 3^{n-1}}$, 所以数列 $\{p_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{n}{2} + \frac{3}{8} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$, 故 D 正确. 故选 ABD.

* 5.5 数学归纳法

刷基础

1. D **【解析】** 当 $n=k$ 时, 左边的代数式为 $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+k}$ ①,

当 $n=k+1$ 时, 左边的代数式为 $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{k+k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}$ ②,
②-①得 $\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$. 故选 D.

2. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 2$ **【解析】** 由 $n \in \mathbf{N}$, 且 $n > 1$ 可知 n 的第一个取值为 $n=2$, 由题意

敲黑板: 运用数学归纳法证明时, 注意 n 的第一个取值, 不一定从 1 开始. 可知, 当 $n=2$ 时, $2^2-1=3$, 所以第一步需验证的不等式为 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 2$.

3. $(2k+2) + (2k+3)$ **【解析】** 当 $n=k$ 时, 左边为 $1+2+3+\cdots+(2k+1)$, 则当 $n=k+1$ 时, 左边为 $1+2+3+\cdots+(2k+1) + (2k+2) + [2(k+1)+1]$, 则从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时, 左边需增添的项是 $(2k+2) + (2k+3)$.

4. **【解】** (1) 当 $n=1$ 时, 由已知条件可得 $a_1 + 1 = \frac{a_1^2 + 2}{2a_1}$, 即 $a_1^2 + 2a_1 - 2 = 0$, 解得 $a_1 = \sqrt{3} - 1 (a_1 > 0)$;
当 $n=2$ 时, 由已知条件可得 $a_1 + a_2 + 1 = \frac{a_2^2 + 2}{2a_2}$, 将 $a_1 = \sqrt{3} - 1$ 代入得 $a_2^2 + 2\sqrt{3}a_2 - 2 = 0$, 解得 $a_2 = \sqrt{5} - \sqrt{3} (a_2 > 0)$;
当 $n=3$ 时, 由已知条件可得 $a_1 + a_2 +$

$a_3 + 1 = \frac{a_3^2 + 2}{2a_3}$, 同理解得 $a_3 = \sqrt{7} - \sqrt{5} (a_3 > 0)$.

(2) 由 (1) 可以猜想 $a_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$, $n=1, 2, 3$ 时, 等式成立; 假设当 $n=k (k \geq 3, k \in \mathbf{N}_+)$ 时, 等式成立, 即 $a_k = \sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}$,

又因为 $a_{k+1} = S_{k+1} - S_k = \frac{a_{k+1}}{2} + \frac{1}{a_{k+1}} - \frac{a_k}{2} - \frac{1}{a_k}$,

将 $a_k = \sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}$ 代入上式解得 $a_{k+1} = \sqrt{2k+3} - \sqrt{2k+1} (a_{k+1} > 0)$, 所以当 $n=k+1$ 时等式也成立.

综上, $a_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1} (n \in \mathbf{N}_+)$.

5. (1) **【解】** 存在满足题意的常数 a, b, c ,

由题可得 $\begin{cases} f(1) = 2 = a+b+c, \\ f(2) = 8 = 8a+4b+2c, \\ f(3) = 20 = 27a+9b+3c, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a = \frac{1}{3}, \\ b = 1, \\ c = \frac{2}{3}, \end{cases}$

所以存在 $a = \frac{1}{3}, b = 1, c = \frac{2}{3}$ 使得 $f(n) = an^3 + bn^2 + cn$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}$ 都成立.

(2) **【证明】** 由 (1) 得 $f(n) = \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n$,

当 $n=1$ 时, $f(1) = 2 = \frac{1}{3} + 1 + \frac{2}{3}$,

假设当 $n=k$ 时, $f(k) = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + k \cdot (k+1) = \frac{1}{3}k^3 + k^2 + \frac{2}{3}k$ 成立,

当 $n=k+1$ 时, $f(k+1) = f(k) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}k^3 + k^2 + \frac{2}{3}k + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}k^3 + 2k^2 + \frac{11}{3}k + 2 = \frac{1}{3}(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (k^2 + 2k + 1) + \frac{2}{3}(k+1)$

$= \frac{1}{3}(k+1)^3 + (k+1)^2 + \frac{2}{3}(k+1)$, 所以当 $n=k+1$ 时, $f(k+1) = \frac{1}{3}(k+1)^3 + (k+1)^2 + \frac{2}{3}(k+1)$ 成立.

综上, $f(n) = \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n (n \in \mathbf{N}_+)$ 成立.

6. **【证明】** ① 当 $n=1$ 时, $11^{n+1} + 12^{2n-1} = 11^2 + 12 = 133$ 能被 133 整除, 所以当 $n=1$ 时结论成立.

② 假设当 $n=k (k \in \mathbf{N}_+)$ 时, $11^{k+1} + 12^{2k-1}$ 能被 133 整除, 那么当 $n=k+1$ 时, $11^{k+2} + 12^{2k+1} = 11^{k+1} \times 11 + 12^{2k-1} \times 12^2 = 11^{k+1} \times 11 + 12^{2k-1} \times 11 \times 12^{2k-1} \times 12^2 = 11 \times (11^{k+1} + 12^{2k-1}) + 133 \times 12^{2k-1}$. 由假设可知 $11 \times (11^{k+1} + 12^{2k-1}) + 133 \times 12^{2k-1}$ 能被 133 整除, 即 $11^{k+2} + 12^{2k+1}$ 能被 133 整除, 所以当 $n=k+1$ 时结论也成立. 综上, $11^{n+1} + 12^{2n-1} (n \in \mathbf{N}_+)$ 能被 133 整除.

第五章素养检测

刷速度

1. B 【解析】由 $a_3 = 2a_2$, 得 $a_1 + 2d = 2(a_1 + d)$, 得 $a_1 = 0$, 故 $d = \frac{a_4 - a_1}{4 - 1} = 2$. 故选 B.

2. B 【解析】因为 a_6, a_{10} 是方程 $x^2 + 8x + 5 = 0$ 的两根, 所以由根与系数的关系可得 $\begin{cases} a_6 + a_{10} = -8, \\ a_6 \cdot a_{10} = 5, \end{cases}$ 所以 $a_6 < 0, a_{10} < 0$. 因为 $\{a_n\}$ 为等比数列, 所以 $a_8^2 = a_6 \cdot a_{10} = 5$, 解得 $a_8 = \pm\sqrt{5}$. 若 $a_8 = \sqrt{5}$, 则 $a_7^2 = a_6 \cdot a_8 < 0$, 不符合要求, 故 $a_8 = -\sqrt{5}$. 故选 B.

3. C 【解析】在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 由公比 $q = 2$, 可得 $a_1 + a_4 + \dots + a_{85}, a_2 + a_5 + \dots + a_{86}, a_3 + a_6 + \dots + a_{87}$ 构成公比为 2 的等比数列, 设 $a_1 + a_4 + \dots + a_{85} = m$, 则 $a_2 + a_5 + \dots + a_{86} = 2m, a_3 + a_6 + \dots + a_{87} = 4m$. 因为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 87 项和 $S_{87} = 140$, 所以 $m + 2m + 4m = 140$, 解得 $m = 20$, 所以 $a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{87} = 80$. 故选 C.

4. C 【解析】因为 $\forall n \in \mathbb{N}_+, a_{n+1} < a_n$ 恒成立, 所以数列 $\{a_n\}$ 是递减数列, 又数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \begin{cases} (1-3a)n + 15a, & n \leq 4, \\ 4a^{n-3} + 4, & n \geq 5, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} 1-3a < 0, \\ 0 < a < 1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 1-3a < 0, \\ 0 < a < 1, \\ 4(1-3a) + 15a > 4a^2 + 4, \end{cases}$

→ 敲黑板: 注意衔接处两边值的大小

即 $\begin{cases} a > \frac{1}{3}, \\ 0 < a < 1, \end{cases}$ 解得 $\frac{1}{3} < a < \frac{3}{4}$. 故选 C.

5. B 【解析】因为 $a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)a_n + \frac{2}{n}$ ($n \in \mathbb{N}_+$), 所以 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{2}{n(n+1)}$, 即 $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, 所以当 $n \geq 2$ 时, 有 $\frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{1} = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right), \frac{a_3}{3} - \frac{a_2}{2} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right), \frac{a_4}{4} - \frac{a_3}{3} = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right), \dots, \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n-1}}{n-1} = 2\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$, 累加得 $\frac{a_n}{n} - \frac{a_1}{1} = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ ($n \geq 2$), 又 $a_1 = -1$, 所以 $\frac{a_n}{n} = 1 - \frac{2}{n}$ ($n \geq 2$), 即 $a_n = n - 2$ ($n \geq 2$). 当 $n = 1$ 时, $a_1 = 1 - 2 = -1$ 符合上式, 所以 $a_n = n - 2$ ($n \in \mathbb{N}_+$). 则 $a_{22} = 22 - 2 = 20$. 故选 B.

6. D 【解析】由题意知, 数列 $\{a_n\}$ 的前 5

项构成公比为 q 的等比数列, 首项 $a_1 = 5$,

所以 $a_5 = a_1 q^4 = 5q^4$.

因为从第 5 项到第 15 项构成公差为 d 的等差数列, 且 $a_{15} = 240$,

所以 $a_{15} = a_5 + (15 - 5)d = a_5 + 10d = 240$, 所以 $5q^4 + 10d = 240$, 即 $q^4 + 2d = 48$.

又因为 $q, d \in \mathbb{N}_+$, 所以

若 $q = 1$, 则 $1 + 2d = 48$, 解得 $d = 23.5$, 不符合题意;

若 $q = 2$, 则 $16 + 2d = 48$, 解得 $d = 16$, 符合题意;

若 $q \geq 3$, 则 $q^4 \geq 81 > 48$, 无解;

故 $q = 2, d = 16$, 此时 $a_5 = 5 \times 2^4 = 80$,

所以 $a_{12} = a_5 + (12 - 5)d = a_5 + 7d = 80 + 7 \times 16 = 192$,

所以第 12 天月球被太阳照亮部分占

满月的 $\frac{a_{12}}{240} = \frac{192}{240} = \frac{4}{5}$. 故选 D.

7. A 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其首项为 1, 公差为 2, 所以 $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1$.

因为数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 其首项为 1, 公比为 2, 所以 $b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$,

所以 $c_n = 2 \cdot 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1$, 则 $T_n = c_1 +$

$c_2 + c_3 + \dots + c_n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} - n = 2^{n+1} - 2 - n$.

因为对任意的 $n \in \mathbb{N}_+, c_n > 0$, 所以数列 $\{T_n\}$ 单调递增. 因为 $T_9 = 2^{10} - 2 - 9 = 1024 - 11 = 1013 < 2023, T_{10} = 2^{11} - 2 - 10 = 2048 - 12 = 2036 > 2023$, 所以当 $T_n < 2023$ 时, $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. 故选 A.

8. B 【解析】因为等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n, B_n , 且 $\frac{A_n}{B_n} = \frac{3n+75}{2n+5}$, 所以可设 $A_n = kn(3n+75)$ ($k \neq 0$), $B_n = kn(2n+5)$,

→ 敲黑板: 根据等差数列前 n 项和公式

变形 $S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$ 及两个等差数列的前 n 项和比值关系设出前 n 项和

所以当 $n \geq 2$ 时, $a_n = A_n - A_{n-1} = kn(3n+75) - k(n-1)(3n+72) = 6k(n+12)$,

又 $\{a_n\}$ 是等差数列, 所以 $a_n = 6k(n+12)$ ($n \in \mathbb{N}_+$).

当 $n \geq 2$ 时, $b_n = B_n - B_{n-1} = kn(2n+5) - k(n-1)(2n+3) = k(4n+3)$,

又 $\{b_n\}$ 是等差数列, 所以 $b_n = k(4n+3)$, $n \in \mathbb{N}_+$,

则 $\frac{a_{2n}}{b_n} = \frac{6k(2n+12)}{k(4n+3)} = \frac{12n+72}{4n+3} =$

$3 + \frac{63}{4n+3}$,

因为 $n \in \mathbb{N}_+, \frac{a_{2n}}{b_n} \in \mathbb{Z}$, 所以 $4n+3$ 是 63

的正因数, 63 的正因数有 1, 3, 7, 9, 21, 63,

则 $4n+3=7$, 解得 $n=1$; $4n+3=63$, 解得

$n=15$, 其余情况均不满足题意.

所以 $n=1$ 或 15, 即满足 $\frac{a_{2n}}{b_n} \in \mathbb{Z}$ 的正整数 n 有 2 个. 故选 B.

9. ABC 【解析】 $a_n + \frac{1}{a_n} = 2S_n$, 令 $n=1$, 则

$a_1 + \frac{1}{a_1} = 2S_1$, 得 $a_1 = 1$ (舍负), A 正确.

因为 $a_n + \frac{1}{a_n} = 2S_n$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $S_n -$

$S_{n-1} + \frac{1}{S_n - S_{n-1}} = 2S_n$, 得 $S_n^2 - S_{n-1}^2 = 1$, 则数列 $\{S_n^2\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等

差数列, 故 $S_n^2 + S_{n+2}^2 = 2S_{n+1}^2$, B 正确.

易得 $S_n^2 = n$, 则 $S_n = \sqrt{n}$, 所以当 $n \geq 2$

时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, 又因为 $a_1 = 1$ 符合上式, 所以 $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$,

因为函数 $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$

在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $a_n > a_{n+1}$, C 正确.

因为 $S_1 S_3 = \sqrt{3}$, $2S_2^2 = 4$, 所以 $S_1 S_3 \neq 2S_2^2$, D 错误. 故选 ABC.

10. AC 【解析】 $S_{11} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 +$

$a_5) + \dots + (a_{10} + a_{11})$

$= 2 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^4 + 2 \times 3^6 + 2 \times 3^8 + 2 \times 3^{10}$

$= 2 + 2 \times (3^2 + 3^4 + 3^6 + 3^8 + 3^{10})$

$= 2 + \frac{2 \times (3^2 - 3^{10} \times 3^2)}{1 - 3^2}$

$= 2 + \frac{2 \times (3^{12} - 9)}{8} = 2 + \frac{9^6 - 9}{4} = \frac{9^6 - 1}{4}$,

故 A 正确.

由 $a_{n+1} + a_n = 2 \times 3^n$, 可得 $a_{n+1} = -a_n +$

$\frac{(3+1) \times 3^n}{2} = -a_n + \frac{3^{n+1}}{2} + \frac{3^n}{2}$,

即 $a_{n+1} - \frac{3^{n+1}}{2} = -\left(a_n - \frac{3^n}{2}\right)$.

又 $a_1 - \frac{3^1}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$,

所以 $\left\{a_n - \frac{3^n}{2}\right\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, -1 为

公比的等比数列,

所以 $a_n - \frac{3^n}{2} = \frac{1}{2} \times (-1)^{n-1}$,

即 $a_n = \frac{3^n + (-1)^{n-1}}{2}$.

所以当 n 为偶数时, $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$, 故 C

正确.

又 $a_n - 3^n = \frac{-3^n + (-1)^{n-1}}{2}$, 所以 $\{a_n -$

$3^n\}$ 不是等比数列, 故 B 错误.

由上述可得 $na_n = \frac{n \cdot 3^n}{2} +$

$\frac{n \cdot (-1)^{n-1}}{2}$.

令数列 $\left\{\frac{n \cdot 3^n}{2}\right\}$ 的前 n 项和为 A_n , 则

$$A_n = \frac{1}{2}(3+2 \times 3^2+3 \times 3^3+\cdots+n \cdot 3^n),$$

即 $2A_n = 3+2 \times 3^2+3 \times 3^3+\cdots+n \cdot 3^n$ ①,

两边同时乘 3 可得 $6A_n = 3^2+2 \times 3^3+3 \times 3^4+\cdots+n \cdot 3^{n+1}$ ②,

用①-②可得

$$-4A_n = 3+3^2+3^3+\cdots+3^n-n \cdot 3^{n+1}$$

$$= \frac{3-3^{n+1}}{1-3}-n \cdot 3^{n+1}$$

$$= \frac{1-2n}{2} \cdot 3^{n+1}-\frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } A_n = \frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{8}.$$

令数列 $\left\{\frac{n \cdot (-1)^{n-1}}{2}\right\}$ 的前 n 项和为

$$P_n, \text{ 则 } P_n = \frac{1}{2}[1-2+3-4+\cdots+n \cdot (-1)^{n-1}].$$

$$\text{所以 } T_n = A_n + P_n = \frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{8} +$$

$$\frac{1}{2}[1-2+3-4+\cdots+n \cdot (-1)^{n-1}].$$

$$\text{所以 } T_9 = A_9 + P_9 = \frac{(2 \times 9-1)3^{10}+3}{8} +$$

$$\frac{1}{2} \times [(1-2)+(3-4)+(5-6)+(7-8)+9]$$

$$= \frac{17 \times 3^{10}+3}{8} + \frac{1}{2} \times (-4+9)$$

$$= \frac{17 \times 3^{10}+3}{8} + \frac{5}{2} = \frac{17 \times 3^{10}+23}{8}, \text{ 故 D 错误. 故选 AC.}$$

11. BC 【解析】因为 $a_1+a_3=\cos \frac{\pi}{2}+$

$$\cos \frac{3\pi}{2}=0, 2a_2=2\cos \frac{2\pi}{2}=-2,$$

则 $a_1+a_3>2a_2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 不是“凸数列”, 故 A 错误;

$$\text{因为 } a_n+a_{n+2}=\log_2 n+\log_2(n+2)=\log_2[n(n+2)], 2a_{n+1}=\log_2(n+1)^2,$$

且 $n(n+2)-(n+1)^2=-1<0$, 所以 $a_n+a_{n+2}<2a_{n+1}$, 则数列 $\{a_n\}$ 为“凸数列”, 故 B 正确;

$$\text{因为 } S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n, S_{n+1}=a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}, S_{n+2}=a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_{n+2},$$

$$\text{所以 } S_n+S_{n+2}=2(a_1+a_2+\cdots+a_n)+a_{n+1}+a_{n+2}, 2S_{n+1}=2(a_1+a_2+\cdots+a_n)+2a_{n+1},$$

$$\text{所以 } (S_n+S_{n+2})-2S_{n+1}=(a_{n+1}+a_{n+2})-2a_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1},$$

$$\text{又数列 } \{a_n\} \text{ 是单调递减数列, 则 } a_{n+2}-a_{n+1}<0,$$

$$\text{所以 } (S_n+S_{n+2})-2S_{n+1}<0, \text{ 即 } S_n+S_{n+2}<2S_{n+1}, \text{ 即数列 } \{S_n\} \text{ 为“凸数列”, 故 C 正确;}$$

$$\text{因为数列 } \{S_n\} \text{ 为“凸数列”, 所以 } S_n+S_{n+2}<2S_{n+1}, \text{ 即 } (S_{n+2}-S_{n+1})-(S_{n+1}-S_n)<0, \text{ 即 } a_{n+2}-a_{n+1}<0,$$

对任意的正整数 n , 满足 $a_{n+2}<a_{n+1}$, 而

a_2-a_1 的符号不确定, 故 $\{a_n\}$ 不一定

是等差数列. 【陷阱】易忽略 n 是正整数, 即 n 的最小值为 1, 满足 $a_3<a_2$, 但不能确定 a_1 与 a_2 的大小关系

为单调递减数列, 故 D 错误. 故选 BC.

12. $\frac{8}{125}$ 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公

比为 q , 由题意知 $q>0$ 且 $q \neq 1$, 则

$$\frac{S_4}{S_8} = \frac{\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}} = \frac{1}{1+q^4} = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}, \text{ 解得}$$

$$q=2, \text{ 则 } S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 15a_1 = 3, \text{ 所}$$

$$\text{以 } a_1 = \frac{1}{5}, a_2 = \frac{2}{5}, a_3 = \frac{4}{5}, a_4 = \frac{8}{5}.$$

易知当 $n \leq 3$ 时, $a_n < 1$, 当 $n \geq 4$ 时, $a_n > 1$, 故 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 的最小值为

$$a_1 a_2 a_3 = \frac{8}{125}.$$

13. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}

【解析】由题意知 $\frac{S_n}{3n+1} = \frac{n}{2}$, 则 $S_n =$

$$\frac{3n^2+n}{2}, \text{ 当 } n=1 \text{ 时, } a_1=S_1=2;$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = 3n-1. \text{ 而 } a_1=3 \times 1-1=2, \text{ 符合上式, 所以 } a_n =$$

$$3n-1, n \in \mathbb{N}_+, \text{ 所以 } b_n = (-1)^n a_n = (-1)^n (3n-1),$$

$$\text{所以 } T_n = -2+5-8+11-\cdots+(-1)^n \cdot$$

$$(3n-1), \text{ 当 } n \text{ 为偶数时, } T_n = \frac{3n}{2},$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } T_n = \frac{3(n-1)}{2} - (3n-1) = \frac{3n+1}{2}, \text{ 所以 } |T_n| \text{ 单调递增,}$$

$$1) = \frac{3n+1}{2}, \text{ 所以 } |T_n| \text{ 单调递增,}$$

$$\text{要使 } |T_n| \leq 20, \text{ 即 } \frac{3n+1}{2} \leq 20 (n \text{ 为奇数}) \text{ 或 } \frac{3n}{2} \leq 20 (n \text{ 为偶数}), \text{ 解得 } n \leq$$

$$13 \text{ 且 } n \in \mathbb{N}_+, \text{ 故所求 } n \text{ 的集合为 } \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}.$$

14. -1 【解析】 $\because a_{n+3}=2a_n$,

$\therefore \{a_n\}$ 可分为三个子数列: $\{a_{3k+1}\}, \{a_{3k+2}\}, \{a_{3k+3}\}$, 其中 $k \in \mathbb{N}$, 均是等

比数列, 公比均为 $q=2$, 首项分别为 a_1, a_2, a_3 .

$$\therefore S_4 = S_3 + a_4, \therefore a_4 = S_4 - S_3 = -1 - 1 = -2,$$

$$\therefore a_{n+3} = 2a_n, \text{ 令 } n=1, \text{ 则 } a_4 = 2a_1,$$

$$\therefore 2a_1 = -2, \text{ 解得 } a_1 = -1,$$

$$\therefore \text{子数列的通项公式为 } a_{3k+1} = 2^k a_1 = -2^k, a_{3k+2} = 2^k a_2, a_{3k+3} = 2^k a_3.$$

$$\text{设 } m \geq 1, \therefore S_{3m} = \sum_{k=0}^{m-1} (a_{3k+1} + a_{3k+2} + a_{3k+3})$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} (-2^k + 2^k a_2 + 2^k a_3)$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3) \sum_{k=0}^{m-1} 2^k,$$

$$\therefore S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1,$$

$$\therefore S_{3m} = \sum_{k=0}^{m-1} 2^k = \frac{2^m-1}{2-1} = 2^m-1,$$

$$\therefore 2 \ 026 = 3 \times 675 + 1,$$

$$\therefore S_{2 \ 026} = S_{3 \times 675 + 1} = S_{3 \times 675} + a_{3 \times 675 + 1} = 2^{675} - 1 + 2^{675} a_1 = 2^{675} - 1 - 2^{675} = -1.$$

15. (1) 【证明】由 $a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1$ 得

$$a_{n+1} + (n+1) = 3(a_n + n),$$

且 $a_1 + 1 = 2 \neq 0$, 所以数列 $\{a_n + n\}$ 是首项为 2, 公比为 3 的等比数列.

(2) 【解】由 (1) 知数列 $\{a_n + n\}$ 是首项为 2, 公比为 3 的等比数列,

$$\text{所以 } a_n + n = 2 \times 3^{n-1}, \text{ 即 } a_n = 2 \times 3^{n-1} - n.$$

$$\text{所以数列 } \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为}$$

$$S_n = 2 \times (1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}) - (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 2 \times \frac{1-3^n}{1-3} - \frac{(1+n)n}{2} = 3^n -$$

$$1 - \frac{(1+n)n}{2}.$$

16. 【解】(1) 因为 $a_4 = a_1 q^3 = 27$, 又因为

$$a_2, a_3 \text{ 的等差中项为 } \frac{3}{2}(a_1 + a_2), \text{ 所以}$$

$$a_2 + a_3 = 3(a_1 + a_2), \text{ 即 } a_1 q + a_1 q^2 = 3(a_1 + a_1 q),$$

$$\text{又 } a_1 \neq 0, \text{ 所以 } q^2 - 2q - 3 = 0 \Rightarrow (q-3)(q+1) = 0, \text{ 解得 } q=3 \text{ 或 } q=-1 (\text{舍}),$$

$$\text{所以 } a_1 = 1, \text{ 故 } a_n = 3^{n-1} (n \in \mathbb{N}_+).$$

$$(2) \text{ 因为 } b_n = \log_3 a_{2n}, a_{2n} = 3^{2n-1}, \text{ 所以}$$

$$b_n = \log_3 a_{2n} = \log_3 3^{2n-1} = 2n-1, \text{ 即 } \{b_n\} \text{ 是}$$

$$\text{等差数列, 所以 } S_n = \frac{(1+2n-1)n}{2} = n^2,$$

$$\text{则 } 4S_n = 4n^2. \text{ 所以 } c_n = \frac{1}{4n^2-1} =$$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) =$$

$$\frac{n}{2n+1}, \text{ 所以 } T_n = \frac{n}{2n+1}.$$

17. 【解】(1) 由 $S_n - 2 + a_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n \in$

$$\mathbb{N}_+), \text{ 得 } S_n = 2 - a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\text{令 } n=1, \text{ 可得 } S_1 = -a_1 - 1 + 2 = a_1, \text{ 解得}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_{n-1} = 2 - a_{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},$$

$$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = -a_n + a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$(n \geq 2), \text{ 即 } 2^n a_n = 2^{n-1} a_{n-1} + 1 (n \geq 2),$$

$$\therefore b_n = 2^n a_n, \therefore b_n = b_{n-1} + 1, \text{ 即当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_n - b_{n-1} = 1.$$

$$\text{又 } b_1 = 2a_1 = 1, \therefore \text{数列 } \{b_n\} \text{ 是首项和公差均为 1 的等差数列, } b_n = 1 + (n-1) \cdot 1 = n =$$

$$2^n a_n, \therefore a_n = \frac{n}{2^n}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } a_n = \frac{n}{2^n}, \therefore S_n = 2 - \frac{n}{2^n} -$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n},$$

$$\text{故 } T_n = 2n - \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{n+1}{2^{n-1}} + \frac{n+2}{2^n} \right).$$

$$\text{令 } R_n = \frac{3}{2} + \frac{4}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{n+1}{2^{n-1}} + \frac{n+2}{2^n},$$

$$\therefore \frac{1}{2} R_n = \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \cdots + \frac{n+1}{2^n} + \frac{n+2}{2^{n+1}},$$

$$\therefore \frac{1}{2} R_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n+2}{2^{n+1}} =$$

$$\frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n+2}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2}{2^{n+1}} - \frac{n+2}{2^{n+1}},$$

$$\therefore R_n = 4 - \frac{n+4}{2^n}, \therefore T_n = 2n - 4 + \frac{n+4}{2^n}.$$

18. 【解】 (1) 已知 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 2a_n + 1} + 1$, 则 $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$.

猜测: $a_n = 2n - 1$ ($n \in \mathbf{N}_+$).

证明如下:

$$\text{因为 } a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 2a_n + 1} + 1 = \sqrt{(a_n + 1)^2} + 1 = |a_n + 1| + 1,$$

所以 $a_{n+1} - 1 = \sqrt{a_n^2 + 2a_n + 1} \geq 0$, 则 $a_{n+1} \geq 1$, 所以 $a_n \geq 1$.

故 $a_{n+1} = a_n + 1 + 1 = a_n + 2$, 即 $a_{n+1} - a_n = 2$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1 = 1$ 为首项, 2 为公差的等差数列, 所以 $a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$ ($n \in \mathbf{N}_+$).

(2) $b_n = (-1)^n \cdot a_n = (-1)^n (2n - 1)$, 当 n 为偶数时, $T_n = (-1 + 3) + (-5 + 7) + \cdots + [-(2n - 3) + (2n - 1)] = 2 \times \frac{n}{2} = n$;

当 n 为奇数时, $T_n = -1 + (3 - 5) + (7 - 9) + \cdots + [(2n - 3) - (2n - 1)] = -1 - 2 \times \frac{n-1}{2} = -n$,

所以 $T_n = \begin{cases} -n, & n \text{ 为奇数}, \\ n, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$

$$(3) c_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$S_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2},$$

随着 n 的增大, $\frac{1}{4n+2}$ 减小, S_n 增大,

但 $-\frac{1}{4n+2} < 0$ 恒成立, 所以 $S_n < \frac{1}{2}$.

若对任意 $n \in \mathbf{N}_+$, 不等式 $S_n < \lambda$ 恒成立,

则 $\lambda \geq \frac{1}{2}$, 所以实数 λ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

19. (1) 【解】 因为数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 前 n 项和为 S_n , 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列,

所以设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\{b_n\}$ 的公比为 q , 因为 $b_1 = a_1 + 1 = 3 \Rightarrow a_1 = 2$, $S_3 = b_1 + b_2$, $S_5 = b_1 + b_3$,

$$\text{所以 } \begin{cases} 3 \times 2 + 3d = 3 + 3q, \\ 5 \times 2 + 10d = 3 + 3q^2, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} d = 2, & \text{或} \\ q = 3, & \begin{cases} d = -\frac{2}{3}, \\ q = \frac{1}{3}, \end{cases} \end{cases}$$

又因为数列 $\{b_n\}$ 是递增等比数列且

$$b_1 = 3, \text{ 所以 } \begin{cases} d = 2, \\ q = 3, \end{cases}$$

所以 $a_n = 2n$, $b_n = 3^n$.

(2) 【解】由 (1) 得 $b_n = 3^n$,

$$\begin{aligned} \text{当 } n = 2k \text{ (} k \in \mathbf{N}_+ \text{)} \text{ 时, } T_n &= t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{2k} = b_1 + b_2 + b_4 + b_5 + \cdots + b_{3k-2} + b_{3k-1} \\ &= (b_1 + b_4 + \cdots + b_{3k-2}) + (b_2 + b_5 + \cdots + b_{3k-1}) \\ &= (3^1 + 3^4 + \cdots + 3^{3k-2}) + (3^2 + 3^5 + \cdots + 3^{3k-1}) \\ &= \frac{3(1-3^{3k})}{1-3^3} + \frac{3^2(1-3^{3k})}{1-3^3} = \frac{2 \times 3^{3k+1} - 6}{13} \\ &= \frac{2 \times 3^{\frac{3n}{2}+1} - 6}{13}; \end{aligned}$$

当 $n = 2k - 1$ ($k \in \mathbf{N}_+$) 时,

$$\begin{aligned} T_n &= T_{2k-1} = T_{2k} - 3^{3k-1} \\ &= \frac{2 \times 3^{3k+1} - 6}{13} - 3^{3k-1} = \frac{5 \times 3^{\frac{3n+1}{2}} - 6}{13}. \end{aligned}$$

$$\text{综上, } T_n = \begin{cases} \frac{2 \times 3^{\frac{3n}{2}+1} - 6}{13}, & n = 2k, k \in \mathbf{N}_+, \\ \frac{5 \times 3^{\frac{3n+1}{2}} - 6}{13}, & n = 2k - 1, k \in \mathbf{N}_+. \end{cases}$$

(3) 【证明】由已知得 $c_i \in \{2, 4, 6, \dots, 4k\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 2k$, $k \in \mathbf{N}_+$, 不妨设 $c_1 < c_2$, $Q = |c_1 - c_2| + |c_2 - c_3| +$

$$|c_3 - c_4| + \cdots + |c_{2k-1} - c_{2k}|.$$

首先证明 Q 取最大值时, $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{2k}$ 中不存在连续 3 项递增或递减,

假设 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{2k}$ 中存在连续 3 项递增或递减, 即存在 $m \in \{1, 2, 3, \dots, 2k-2\}$ 使得 $c_m < c_{m+1} < c_{m+2}$ 或者 $c_m > c_{m+1} > c_{m+2}$, 所以 $|c_m - c_{m+1}| + |c_{m+1} - c_{m+2}| = |c_m - c_{m+2}|$,

$$\text{此时 } Q_1 = |c_1 - c_2| + |c_2 - c_3| + \cdots + |c_m - c_{m+1}| + |c_{m+1} - c_{m+2}| + \cdots + |c_{2k-1} - c_{2k}| = |c_1 - c_2| + |c_2 - c_3| + \cdots + |c_m - c_{m+2}| + \cdots + |c_{2k-1} - c_{2k}|,$$

则将 c_{m+1} 调换到 c_1 之前,

$$\text{此时 } Q_2 = |c_{m+1} - c_1| + |c_1 - c_2| + |c_2 - c_3| + \cdots + |c_m - c_{m+2}| + \cdots + |c_{2k-1} - c_{2k}| > Q_1,$$

因此 $c_1 < c_2$ 时, Q 取最大值必有 $c_1 < c_2 > c_3, \dots, c_{2k-2} > c_{2k-1}, c_{2k-1} < c_{2k}$,

$$\text{此时 } Q = c_2 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - c_3 + \cdots + c_{2k-2} - c_{2k-1} + c_{2k} - c_{2k-1} = 2(c_2 + c_4 + \cdots + c_{2k}) - 2(c_1 + c_3 + \cdots + c_{2k-1}) + c_1 - c_{2k},$$

所以 Q 取最大值时 $c_{2k-1} \in \{2, 4, 6, \dots, 2k\}$, $c_{2k} \in \{2k+2, 2k+4, 2k+6, \dots, 4k\}$,

并且 $c_1 = 2k, c_{2k} = 2k+2$,

$$\text{故 } M_{2k} = 2(2k+2+2k+4+\cdots+4k) - 2(2+4+\cdots+2k) + 2k - (2k+2) = 4k^2 - 2.$$

$$\text{当 } k = 1 \text{ 时, } \frac{1}{M_{2k}} = \frac{1}{2} < \frac{11}{16};$$

$$\begin{aligned} \text{当 } k \geq 2 \text{ 时, } \sum_{i=1}^n \frac{1}{M_{2k}} &= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{M_{2k}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{4k^2 - 2} < \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{4k^2 - 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) < \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^n \frac{1}{M_{2k}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{11}{16}.$$

$$\text{综上, } \sum_{k=1}^n \frac{1}{M_{2k}} < \frac{11}{16}.$$

第五章高考强化

刷真题

1. C 【解析】 由 $S_{2n} - S_n = n$, 可得 $S_8 - S_4 = 4$, $S_6 - S_3 = 3$, $S_4 - S_2 = 2$, 所以 $a_3 + a_4 = 2$. 又因为 $a_3 = 6$, 所以 $a_4 = -4$. 又因为 $a_7 + a_8 = S_8 - S_6$, 所以 $a_7 + a_8 = (S_8 - S_4) - (S_6 - S_4) = 4 - (S_6 - S_3 - a_4) = 4 - (3 - a_4) = 1 + (-4) = -3$. 故选 C.

2. A 【解析】 若存在常数 M , 使 $a_n \leq M \leq b_n$ 对任意正整数 n 成立, 则必有 $a_n \leq b_n$, 充分性成立; 反之, 设 $a_n = n$, $b_n = n + 1$, 满足 $a_n \leq b_n$, 但不存在常数 M , 使 $a_n \leq M \leq b_n$ 恒成立, 即必要性不成立, 因此“存在常数 M , 使 $a_n \leq M \leq b_n$ ($n \in \mathbf{N}_+$)”是“ $a_n \leq b_n$ ($n \in \mathbf{N}_+$)”的充分不必要条件, 故选 A.

多种解法

若存在常数 M , 使 $a_n \leq M \leq b_n$ 对任意正整数 n 成立, 则数列 $\{a_n\}$ 的最大项不大于 M , 数列 $\{b_n\}$ 的最小项不小于 M , 因此必有 $a_n \leq b_n$, 充分性成立; 反之, 设点 (n, a_n) ($n \in \mathbf{N}_+$) 在函数 $f(x)$ 的图象上, 点 (n, b_n) ($n \in \mathbf{N}_+$) 在函数 $g(x)$ 的图象

上, 曲线 $y=f(x)$ 总在曲线 $y=g(x)$ 下方(可以有公共点), 即 $a_n \leq b_n$, 但不一定存在直线 $y=M$, 使曲线 $y=f(x)$ 在直线 $y=M$ 下方(可以有公共点), 且曲线 $y=g(x)$ 在直线 $y=M$ 上方(可以有公共点), 因此必要性不成立, 故“存在常数 M , 使 $a_n \leq M \leq b_n$ ($n \in \mathbf{N}_+$)”是“ $a_n \leq b_n$ ($n \in \mathbf{N}_+$)”的充分不必要条件, 故选 A.

3. 【解】(1) $2S_n = na_n$ ①,

当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} = (n-1)a_{n-1}$ ②,

由 ①-② 得, $2a_n = na_n - (n-1)a_{n-1}$,

即 $(n-1)a_{n-1} = (n-2)a_n$.

当 $n=2$ 时, $a_1=0$;

当 $n \geq 3$ 时, $\frac{a_{n-1}}{n-2} = \frac{a_n}{n-1}$.

$\therefore$ 当 $n \geq 2$ 时, $\left\{\frac{a_n}{n-1}\right\}$ 为常数列,

$\therefore \frac{a_n}{n-1} = \frac{a_2}{1} = 1, \therefore a_n = n-1 (n \geq 2)$.

由 $2S_n = na_n$, 当 $n=1$ 时, $2a_1 = a_1, a_1 = 0 = 1-1$.

$\therefore a_n = n-1 (n \in \mathbf{N}_+)$.

(2) 由 (1) 知, $\frac{a_{n+1}}{2^n} = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ③,

$\frac{1}{2}T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ④,

由 ③-④ 得 $\frac{1}{2}T_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} - n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

$\therefore T_n = 2 - (2+n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4. B 【解析】记 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

因为 $S_3=6, S_5=-5$, 所以 $\begin{cases} 3a_1+3d=6, \\ 5a_1+10d=-5, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a_1=5, \\ d=-3, \end{cases}$

所以 $S_6 = 6a_1 + 15d = 6 \times 5 + 15 \times (-3) = -15$. 故选 B.

5. B 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\therefore S_5 = 5a_1 + 10d, S_{10} = 10a_1 + 45d$,

$S_5 = S_{10}, \therefore 5a_1 + 10d = 10a_1 + 45d$, 即

$a_1 = -7d. \therefore a_5 = a_1 + 4d = 1, \therefore d = -\frac{1}{3},$

$\therefore a_1 = -7d = \frac{7}{3}$. 故选 B.

6. C

思路导引 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $\rightarrow$ 分析 a_n 的正负 $\rightarrow$ 求 $\{ |a_n| \}$ 的前 12 项和

【解析】 由 $S_n = -n^2 + 8n$, 可得

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = -1 + 8 = 7$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (-n^2 + 8n) - [-(n-1)^2 + 8(n-1)]$,

整理可得 $a_n = -2n + 9$,

经检验, 当 $n=1$ 时, $a_1 = 7$ 符合上式.

综上, $a_n = -2n + 9 (n \in \mathbf{N}_+)$, 可知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

当 $n \leq 4$ 时, $a_n > 0$; 当 $n \geq 5$ 时, $a_n < 0$,

所以 $\{ |a_n| \}$ 的前 12 项和

$$T_{12} = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_{12}) \\ = \frac{4 \times (7+1)}{2} - \frac{8 \times (-1-15)}{2} = 16 + 64 =$$

80. 故选 C.

7. B 【解析】因为等差数列 $\{a_n\}$ 的公差

为 $\frac{2\pi}{3}$, 即 $a_{n+3k} = a_n + 3k \times \frac{2\pi}{3} = a_n + 2k\pi$,

$k \in \mathbf{N}_+$, $\cos a_{n+3k} = \cos a_n$, 这样集合 $S = \{ \cos a_n | n \in \mathbf{N}_+ \} = \{ \cos a_n | n = 1, 2, 3 \} = \{ a, b \}$, 因此 a_1, a_2, a_3 中有两个数的余弦值相等. 满足 $y = \cos x =$

$\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ 的 y 只有 $y = \frac{1}{2} =$

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3}$ 或 $y = -\frac{1}{2} =$

$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3}$, 两种情况对应第三个

数的余弦值分别为 $\cos \pi = -1$ 或

$\cos 2\pi = 1$, 因此 $ab = \frac{1}{2} \times (-1)$ 或 $ab =$

$\left(-\frac{1}{2}\right) \times 1$, 均有 $ab = -\frac{1}{2}$. 故选 B.

多种解法 将等差数列 $\{a_n\}$ 的项 a_n

对应为单位圆上的点 $(\cos a_n,$

$\sin a_n)$, 由于公差是 $\frac{2\pi}{3}$, 即 $a_{n+3k} (k \in$

$\mathbf{N}_+)$ 与 a_n 对应同一个点, 这样圆上

最终有三个点, 这三个点构成等边三

角形, 该三角形的外接圆半径为 1,

因此三角形中心(即原点)到三边的

距离都是 $\frac{1}{2}$. 由题意知三角形有两个

顶点的横坐标相同, 即三角形中有一

条边平行于 y 轴, 则三角形的三个顶

点为 $\left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), (-1, \right.$

$0) \}$ 或 $\left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \right.$

$(1, 0) \}$, 均有 $ab = -\frac{1}{2}$.

8. B 【解析】由 $a_1 = 1, a_2 = a_3 = 3, a_4 =$

$a_5 = 5$, 且 $a_6, a_7, \dots, a_{12}$ 是一个首项为

7, 公差为 2 的等差数列, 可得这 12 个

数依次为 1, 3, 3, 5, 5, 7, 9, 11, 13, 15,

17, 19, 且满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{12} = 1 + 2 \times 3 +$

$2 \times 5 + \frac{7 \times (7+19)}{2} = 108$.

设 $d_0 = \frac{d}{2} (d_0 > 0)$, 分组后对应的等差

数列为 $x-5d_0, x-3d_0, x-d_0, x+d_0, x+3d_0, x+5d_0$,

则由组合前后 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{12}$ 不变可得

$x-5d_0 + x-3d_0 + x-d_0 + x+d_0 + x+3d_0 + x+5d_0 = 6x = 108$, 解得 $x = 18$.

因为原来的 12 个数均为奇数, 所以组合后的 6 个数均为偶数, 又 x 为偶数, 则 d_0 必为偶数.

因为 $x+5d_0 = 18+5d_0 \leq 36$,

悟: 因为原来的 12 个数中最大的 2 个数为 17 和 19, 所以组合后的最大的数不能大于 36

所以 $d_0 \leq 3$, 又 $d_0 > 0$, 所以 $d_0 = 2$, 所以 $d = 2d_0 = 4$. 故选 B.

多种解法 (排除法) 由题可得 $a_1,$

$a_2, \dots, a_{12}$ 依次为 1, 3, 3, 5, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{12} = 108$.

设组合后的等差数列首项为 b_1 , 由题

知公差为 $d (d > 0)$, 项数 $n=6$, 这 6 项的

和 $S_6 = 6b_1 + \frac{6 \times 5}{2}d = 108$, 故 $2b_1 + 5d = 36$.

对于选项 B, 当 $d=4$ 时, $b_1=8$, 此时原

数列可重组为:

$\begin{matrix} 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 \\ \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \end{matrix}$, 满足

题意;

对于选项 A, 当 $d=2$ 时, $b_1=13$, 是奇

数, 而原数列中都是奇数, 故分组后的

各项不可能是奇数, 排除 A;

对于选项 C, 当 $d=6$ 时, $b_1=3$, 而原数

列中最小的 2 个数为 1 和 3, 故 $b_1 \geq 4$,

排除 C;

对于选项 D, 当 $d=8$ 时, $b_1=-2$, 结合选

项 C 的分析知 $b_1 \geq 4$, 排除 D. 故选 B.

链接教材 这道题与教材第 21 页例

7 类似, 都是从实际情境中抽象出数

学模型. 本题以宁夏一百零八塔的塔

数排列为情境, 将传统文化素材转化为

数列模型, 考查等差数列的通项、

求和及分组构造等核心知识. 解题时

需先准确提取题干中的数据, 利用塔

的总数不变建立方程, 最后结合原数

列中两个数之和的范围与奇偶关系

快速验证, 排除不合题意的情形, 确

定公差. 这种“文化情境 $\rightarrow$ 数学建模

$\rightarrow$ 数据验证”的过程, 既体现了教材

中数列模型的应用价值, 也考查了数

学建模、逻辑推理和数据分析的核心

素养, 与近几年高考注重在真实情境

中考查学生信息提取与模型建构能

力的命题趋势一致.

9. 24 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差

为 d , 易知 $a_1 = a_1 + 3d$, 将 $a_1 = -1, a_4 = 5$

代入可得 $-1 + 3d = 5$, 解得 $d = 2$. 故 $S_6 =$

$6a_1 + \frac{6 \times 5}{2}d = 6 \times (-1) + 15 \times 2 = 24$.

10. 95 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差

为 $d, \therefore a_3 + a_4 = 7, 3a_2 + a_5 = 5,$

$\therefore \begin{cases} 2a_1 + 5d = 7, \\ 4a_1 + 7d = 5, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = -4, \\ d = 3. \end{cases} \therefore a_n =$

$3n - 7,$

$\therefore S_{10} = \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} = \frac{10 \times (-4 + 23)}{2} = 95$.

11. -2 9 (答案不唯一, 可以填 [8, 10]

中任意一个实数)

思路导引 第一空: 根据等差数列

前 n 项和公式及已知条件求得公差

d ; 第二空: 根据 $S_n \leq S_5$ 恒成立, 推

断出数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项均非负、第 6

项非正,即 $a_5 \geq 0$ 且 $a_6 \leq 0$, 代入公差 d , 解出 a_1 的取值范围, 任取一个符合范围的值即可

【解析】由已知可得 $S_6 = \frac{6(a_1+a_6)}{2} =$

$3a_1+3a_6$, 代入 $S_6 = 6a_6+30$, 得 $3a_1+3a_6 = 6a_6+30$, 化简得 $a_1-a_6 = 10$.

又 $\{a_n\}$ 为等差数列, 所以 $a_6 = a_1+5d$, 两式联立, 解得 $d = -2$.

若 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, $S_n \leq S_5$ 恒成立, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和在 $n=5$ 时取得最大值, 结合 $d = -2 < 0$, 可知必须满足 $a_5 \geq 0$ 且 $a_6 \leq 0$,

即 $\begin{cases} a_1+4d \geq 0, \\ a_1+5d \leq 0, \end{cases}$ 解得 $8 \leq a_1 \leq 10$, 即 a_1 的取值范围是 $[8, 10]$.

所以符合条件的 a_1 的一个取值可以填 $[8, 10]$ 中任意一个实数.

12. 【解】(1) 由 $3a_2 = 3a_1 + a_3$, 得 $3(a_1+d) = 3a_1 + a_1 + 2d$,

整理得 $a_1 = d$, 所以 $a_n = nd, b_n = \frac{n+1}{d}$.

由 $S_3 + T_3 = 21$, 得 $d+2d+3d+\frac{2}{d}+\frac{3}{d}+\frac{4}{d} = 21$,

整理得 $2d^2-7d+3=0$, 解得 $d=3$ 或 $d=\frac{1}{2}$ (舍), 故 $a_n = 3n$.

(2) 若 $\{b_n\}$ 是等差数列, 则 $b_1+b_3 = 2b_2$, 即 $\frac{2}{a_1} + \frac{12}{a_3} = 2 \times \frac{6}{a_2}$, 所以 $a_2a_3 + 6a_1a_2 = 6a_1a_3$,

所以 $(a_1+d)(a_1+2d) + 6a_1(a_1+d) = 6a_1(a_1+2d)$,

整理得 $a_1^2 - 3a_1d + 2d^2 = 0$, 解得 $a_1 = d$ 或 $a_1 = 2d$.

①若 $a_1 = d$, 则 $a_n = nd, b_n = \frac{n+1}{d}$,

由 $S_{99} - T_{99} = 99$, 得 $50d - \frac{51}{d} = 1$, 即

$50d^2 - d - 51 = 0$,

解得 $d = -1$ (舍) 或 $d = \frac{51}{50}$;

②若 $a_1 = 2d$, 则 $a_n = (n+1)d, b_n = \frac{n}{d}$,

由 $S_{99} - T_{99} = 99$, 得 $51d - \frac{50}{d} = 1$, 即 $51d^2 - d - 50 = 0$,

解得 $d = 1$ (舍) 或 $d = -\frac{50}{51}$ (舍).

综上, $d = \frac{51}{50}$.

13. AD 【解析】根据题意, 由 $\begin{cases} S_3 = 7, \\ a_3 = 1, \end{cases}$ 得

$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 = 7 \text{ ①,} \\ a_1q^2 = 1 \text{ ②,} \end{cases}$ ① $\div$ ② 得 $\frac{1}{q^2} +$

$\frac{1}{q} + 1 = 7$, 化简得 $6q^2 - q - 1 = 0$, 解得

$q = \frac{1}{2}$ 或 $q = -\frac{1}{3}$ (舍去), 故 A 正确;

由 A 可知 $q = \frac{1}{2}$, 则 $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = 4$, 因此

$$a_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

则 $a_5 = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$, 故 B 错误;

巧思: $a_5 = a_3 \cdot q^2 = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$$S_5 = \frac{4 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{31}{4}, \text{ 故 C 错误;}$$

$$a_n + S_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{4 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} + 8 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = 8, \text{ 故 D 正确. 故}$$

选 AD.

多种解法 对于 A, 由 $S_3 = a_1 + a_2 +$

$$a_3 = \frac{a_3}{q^2} + \frac{a_3}{q} + a_3 = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + 1 = 7, \text{ 整理}$$

$$\text{得 } 6q^2 - q - 1 = 0, \text{ 解得 } q = \frac{1}{2} \text{ 或 } q =$$

$$-\frac{1}{3} \text{ (舍去), 故 A 正确; 对于 C, 因}$$

$$\text{为 } S_3 = 7, a_4 = a_3q = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, a_5 =$$

$$a_4q = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \text{ 所以 } S_5 = S_3 + a_4 +$$

$$a_5 = 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{31}{4}, \text{ 故 C 错误.}$$

14. C 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为

$$q. \text{ 因为 } S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 21S_2 = 21 \cdot$$

$$\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}, \text{ 整理得 } 1-q^6 = 21(1-q^2),$$

$$\text{又 } 1-q^6 = (1-q^2)(1+q^2+q^4), \text{ 所以 } 1+q^2+q^4 = 21, \text{ 即 } (q^2-4)(q^2+5) = 0, \text{ 解得 } q^2 = 4.$$

$$\text{又 } S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q}, S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = -5,$$

$$\text{所以 } \frac{S_8}{S_4} = \frac{1-q^8}{1-q^4} = 1+q^4 = 17, \text{ 故 } S_8 = -85, \text{ 故选 C.}$$

多种解法 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比

为 q . 根据等比数列前 n 项和的性质得 $S_2, S_4-S_2, S_6-S_4, S_8-S_6$ 成等比数列,

因为 $S_4 = -5, S_6 = 21S_2$, 即 $S_2, -5-S_2, 21S_2+5, S_8-21S_2$ 成等比数列, 公比

为 q^2 , 所以 $(-5-S_2)^2 = (21S_2+5)S_2$,

整理得 $(4S_2-5)(S_2+1) = 0$, 解得 $S_2 = \frac{5}{4}$ 或 $S_2 = -1$. 当 $S_2 = \frac{5}{4}$ 时,

$$\frac{S_4-S_2}{S_2} = -5 < 0, \text{ 不符合题意; 当 } S_2 =$$

$$-1 \text{ 时, 即 } -1, -4, -16, S_8+21 \text{ 成等比}$$

$$\text{数列, 所以 } (S_8+21) \times (-4) = (-16)^2, \text{ 解得 } S_8 = -85, \text{ 故选 C.}$$

15. ACD 【解析】对于选项 A, 由题意, 得 $2a_1q^2 = a_1 + a_1q$, 即 $2q^2 - q - 1 = 0$, 解

得 $q = -\frac{1}{2}$ 或 $q = 1$ (舍去), 故 A 正确;

$$\text{对于选项 B, } S_n = \frac{a_1 \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$\frac{2a_1}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right], a_1 > 0, \text{ 当 } n \text{ 为偶数}$$

$$\text{时, } 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n < 1, S_n < \frac{2a_1}{3}, \text{ 故 B 错误;}$$

$$\text{巧思: } S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{2}{3}a_1$$

$$\text{对于选项 C, } 2S_{n+2} = \frac{4a_1}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right], S_{n+1} + S_n = \frac{2a_1}{3} \cdot$$

$$\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + \frac{2a_1}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] =$$

$$\frac{2a_1}{3} \left[2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = \frac{4a_1}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right], \text{ 即 } 2S_{n+2} = S_{n+1} + S_n, \text{ 故 C}$$

$$\text{正确;}$$

$$\text{巧思: } 2S_{n+2} - S_{n+1} - S_n = (S_{n+2} - S_{n+1}) + (S_{n+2} - S_n) =$$

$$2a_{n+2} + a_{n+1} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) a_{n+1} + a_{n+1} = 0$$

$$\text{正确;}$$

$$\text{对于选项 D, } \sum_{k=1}^n S_k = \frac{2a_1}{3} \cdot$$

$$\left[n - \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right] = \frac{2na_1}{3} + \frac{2a_1}{9} \cdot$$

$$\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right], \text{ 因为 } 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n > 0,$$

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^n S_k > \frac{2na_1}{3}, \text{ 故 D 正确. 故}$$

$$\text{选 ACD.}$$

链接教材 本题与教材第 43 页习

题 5-3B 第 1 题类似, 都是等比数列

通项公式和前 n 项和公式的基本量

计算, 核心思路均是通过已知条件

建立关于首项和公比的方程 (组),

再代入求解. 不同之处在于, 本题条

件中包含了对公比的取值范围的限制,

因此在解方程时需注意验根, 舍去不符合题意的根.

16. 2 【解析】设该等比数列为 $\{a_n\}$ 且

公比为 $q (q > 0)$. 若 $q = 1$, 则 $S_8 = 2S_4 =$

$$8 \neq 68, \text{ 所以 } q \neq 1.$$

$$\text{巧思: 使用等比数}$$

$$\text{列前 } n \text{ 项和公式时, 先考虑公比是否为 } 1$$

$$\text{根据题意可得 } \begin{cases} S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 4, \\ S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = 68, \end{cases} \text{ 解}$$

$$\text{得 } q = 2 \text{ (负值舍去).}$$

多种解法一 由解析可知, 该数列

的公比 q 是不为 1 的正数, 则 $S_4,$

$S_8-S_4, S_{12}-S_8, \dots$ 成公比为 q^4 的等

比数列, 所以 $\frac{S_8-S_4}{S_4} = \frac{68-4}{4} = q^4$, 解得

$q = 2$ (负值舍去).

多种解法二

由解析可知,该数列的公比 q 是不为 1 的正数,由已知可得 $S_8 = S_4 + q^4 S_4 = 4 + 4q^4 = 68$,解得 $q = 2$

点悟:等比数列 $\{a_n\}$ 中, $S_{m+n} = S_m + q^m S_n = S_n + q^n S_m, m, n \in \mathbf{N}_+$ (负值舍去).

17. 23 $\frac{115}{2}$ 【解析】设升量器的高为 h_1 ,底面半径为 r_1 ,容积为 V_1 ,斗量器的高为 h_2 ,底面半径为 r_2 ,容积为 V_2 ,斛量器的高为 h_3 ,底面半径为 r_3 ,容积为 V_3 ,则 $r_1 = \frac{65}{2}$ mm, $r_2 = \frac{325}{2}$ mm, $r_3 = \frac{325}{2}$ mm, $h_3 = 230$ mm,
- $$V_1 = \pi r_1^2 h_1 = \left(\frac{65}{2}\right)^2 \pi h_1 \text{ (mm}^3\text{)}, V_2 = \pi r_2^2 h_2 = \left(\frac{325}{2}\right)^2 \pi h_2 \text{ (mm}^3\text{)}, V_3 = \pi r_3^2 h_3 = \left(\frac{325}{2}\right)^2 \times 230 \pi \text{ (mm}^3\text{)}.$$
- $\therefore V_1, V_2, V_3$ 成等比数列且公比 $q = 10$,
- $$\therefore V_1 \cdot q^2 = V_3, \text{即} \left(\frac{65}{2}\right)^2 \pi \cdot h_1 \cdot 100 = \left(\frac{325}{2}\right)^2 \times 230 \pi, \text{解得} h_1 = \frac{115}{2} \text{ mm},$$
- $$V_2 \cdot q = V_3, \text{即} \left(\frac{325}{2}\right)^2 \pi \cdot h_2 \cdot 10 = \left(\frac{325}{2}\right)^2 \times 230 \pi, \text{解得} h_2 = 23 \text{ mm.} \therefore \text{斗量器的高} h_2 = 23 \text{ mm, 升量器的高} h_1 = \frac{115}{2} \text{ mm.}$$

18. $\frac{\sqrt{12}}{2}$ 【解析】由题意得, $a_1 + a_2 + \dots + a_{3n} = n^2 + n$ ①,
- 当 $n \geq 2$ 时, $a_1 + a_2 + \dots + a_{3(n-1)} = (n-1)^2 + (n-1)$ ②,
- ①-②得, $a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = 2n$,
- 令 $b_n = a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = 2n$,
- 若 $k = 3n - 2$,则在 $a_{3n-2}, a_{3n-1}, a_{3n}, a_{3n+1}, \dots, a_{3n+6}$ 这 9 项中,含有 b_n , b_{n+1}, b_{n+2} 3 项;
- 则 $q^3 = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{n}$,且 $q^3 = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = \frac{n+2}{n+1}$,而 $\frac{n+2}{n+1} = \frac{n+1}{n}$ 无解,此时不符合题意;
- 若 $k = 3n - 1$,则在 $a_{3n-1}, a_{3n}, a_{3n+1}, a_{3n+2}, \dots, a_{3n+7}$ 这 9 项中,含有 b_{n+1}, b_{n+2} 2 项, $q^3 = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$,易知 $y = 1 + \frac{1}{x+1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,故
- 当 $n = 1$ 时, $(q^3)_{\max} = \frac{3}{2}$,即 $q \leq \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$;
- 若 $k = 3n$,则在 $a_{3n}, a_{3n+1}, a_{3n+2}, a_{3n+3}, \dots, a_{3n+8}$ 这 9 项中,含有 b_{n+1}, b_{n+2} 2 项, $q^3 = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = \frac{n+2}{n+1}$,同理 $q \leq \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{12}}{2}$.

综上所述, q 的最大值为 $\frac{\sqrt{12}}{2}$.

19. 【解】(1) 因为 $4S_n = 3a_n + 4$, 所以 $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 4$, 两式相减得 $4a_{n+1} = 3a_{n+1} - 3a_n$, 即 $a_{n+1} = -3a_n$.
- 又因为 $4S_1 = 3a_1 + 4$, 所以 $a_1 = 4$, 故数列 $\{a_n\}$ 是首项为 4, 公比为 -3 的等比数列. 所以 $a_n = 4 \cdot (-3)^{n-1}$.
- (2) 由 (1) 及题意得, $b_n = (-1)^{n-1} na_n = 4n \cdot 3^{n-1}$, 所以 $T_n = 4(1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + \dots + n \cdot 3^{n-1})$, $3T_n = 4(1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + n \cdot 3^n)$, 两式相减可得 $-2T_n = 4(1 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} - n \cdot 3^n) = 4\left(\frac{1-3^n}{1-3} - n \cdot 3^n\right) = (2-4n)3^n - 2$, 所以 $T_n = (2n-1)3^n + 1$.
- 多种解法 由 (1) 及题意, 得 $b_n = (-1)^{n-1} na_n = 4n \cdot 3^{n-1}$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $T_n = T_{n-1} + 4n \cdot 3^{n-1}$, 两边同时减去 $(2n-1)3^n$, 得 $T_n - (2n-1)3^n = T_{n-1} - (2n-3)3^{n-1}$, 故 $\{T_n - (2n-1)3^n\}$ 为常数列. 所以 $T_n - (2n-1)3^n = T_1 - (2 \times 1 - 1) \cdot 3 = 1$, 所以 $T_n = (2n-1)3^n + 1$, $n \geq 2$. 当 $n = 1$ 时, $T_1 = b_1 = 4$, 满足上式, 所以 $T_n = (2n-1)3^n + 1$.

20. C 【解析】因为 a, b, c 成等差数列, 所以 $a - 2b + c = 0$, 所以直线 $ax + by + c = 0$ 恒过点 $P(1, -2)$. $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$ 化为标准方程得 $x^2 + (y+2)^2 = 5$, 则圆心 C 为 $(0, -2)$, 半径 $r = \sqrt{5}$, 则 $|PC| = 1$, 当 $PC \perp AB$ 时, $|AB|$ 取得最小值, 此时 $|AB| = 2\sqrt{5 - |PC|^2} = 4$, 故选 C.

21. (1) 【解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d . 因为 $b_n = \begin{cases} a_n - 6, & n \text{ 为奇数}, \\ 2a_n, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 所以 $b_1 = a_1 - 6, b_2 = 2a_2 = 2a_1 + 2d, b_3 = a_3 - 6 = a_1 + 2d - 6$. 因为 $S_4 = 32, T_3 = 16$, 所以 $\begin{cases} 4a_1 + 6d = 32, \\ (a_1 - 6) + (2a_1 + 2d) + (a_1 + 2d - 6) = 16, \end{cases}$ 整理得 $\begin{cases} 2a_1 + 3d = 16, \\ a_1 + d = 7, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 5, \\ d = 2, \end{cases}$ 所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n + 3$.
- (2) 【证明】由 (1) 知 $a_n = 2n + 3$, 所以 $S_n = \frac{n[5 + (2n + 3)]}{2} = n^2 + 4n$, $b_n = \begin{cases} 2n - 3, & n \text{ 为奇数}, \\ 4n + 6, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$
- 当 n 为奇数时, $T_n = -1 + 14 + 3 + 22 + 7 + 30 + \dots + (2n-7) + (4n+2) + 2n-3 = [-1 + 3 + \dots + (2n-7)] + [14 + 22 + \dots + (4n+2)]$
- $$= \frac{\frac{n+1}{2}(-1+2n-3)}{2} + \frac{\frac{n-1}{2}(14+4n+2)}{2} = \frac{3n^2+5n-10}{2}.$$
- 当 $n > 5$ 时, $T_n - S_n = \frac{3n^2+5n-10}{2} - (n^2 +$

$$4n) = \frac{n^2-3n-10}{2} = \frac{(n-5)(n+2)}{2} > 0,$$

所以 $T_n > S_n$.

当 n 为偶数时, $T_n = -1 + 14 + 3 + 22 + 7 + 30 + \dots + (2n-5) + (4n+6)$

$$= [-1 + 3 + \dots + (2n-5)] + [14 + 22 + \dots + (4n+6)]$$

$$= \frac{\frac{n}{2}(-1+2n-5)}{2} + \frac{\frac{n}{2}(14+4n+6)}{2} = \frac{3n^2+7n}{2}.$$

当 $n > 5$ 时, $T_n - S_n = \frac{3n^2+7n}{2} - (n^2 + 4n) = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} > 0$, 所以 $T_n > S_n$.

综上所述, 当 $n > 5$ 时, $T_n > S_n$.

22. 思路导引 (2) (i) 明确集合 E_n 表示的含义 $\rightarrow$ 判断两个数列是否含有公共项 $\rightarrow$ 分别计算两个数列的项数 $\rightarrow c_{3n}$; (ii) 将 E_m 拆成两个集合 $\rightarrow$ 分别讨论计算出元素个数 $\rightarrow$ 分别进行数列求和 $\rightarrow$ 将两个集合的元素个数相加

【解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ,

由 $\begin{cases} a_2 = b_1 + b_2, \\ a_4 = b_3 - b_1, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a_1 + d = b_1 + b_1 \cdot q, \\ a_1 + 3d = b_1 \cdot q^2 - b_1, \end{cases}$

将 $a_1 = 2, b_1 = 1$ 代入得 $\begin{cases} 2 + d = 1 + q, \\ 2 + 3d = q^2 - 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} d = 2, \\ q = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} d = -1, \\ q = 0 \end{cases}$ (舍去).

故 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + 2(n-1) = 2n$, $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 3^{n-1}$.

(2) (i) 依题意, c_{3n} 为集合 E_{3n} 中元素的个数.

$a_n = 2n$, 则 a_n 中的项都为偶数; $b_n = 3^{n-1}$, 则 b_n 中的项都为奇数. 故数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 没有公共项.

点悟: 一定要先判断是否有公共项, 因为集合中的元素具有互异性, 若有公共项, 则计算元素个数时, 只能计 1

由 $a_k = 2k \leq 3^n$, 得 $k \leq \frac{3^n}{2}$, 因为 $k \in \mathbf{N}_+$, 且 3^n 为奇数, 所以 $k = 1, 2, \dots, \frac{3^n-1}{2}$, 共有 $\frac{3^n-1}{2}$ 项.

由 $b_k = 3^{k-1} \leq 3^n$, 得 $k \leq n+1$, 所以 $k = 1, 2, \dots, n+1$, 共有 $(n+1)$ 项.

因为二者没有公共项, 所以 $c_{3^n} = \frac{3^n-1}{2} +$

$$n+1 = \frac{3^n}{2} + n + \frac{1}{2}.$$

(ii) 设 $A_m = \{x | x \leq m, x = a_k, k \in \mathbf{N}_+\}$, $B_m = \{x | x \leq m, x = b_k, k \in \mathbf{N}_+\}$, c_m 表示两个集合元素个数之和.

所以集合 A_m 中元素的个数为 $\left[\frac{m}{2}\right]$,

点悟: 此式含义为不大于 $\frac{m}{2}$ 的最大整数

$$\text{故 } \sum_{m=1}^{3^n-1} (-1)^m (2m) \left[\frac{m}{2} \right] = 0+4-6+16-20+36-42+\cdots+2(3^n-1) \cdot \frac{3^n-1}{2} = 0+(-2)+(-4)+(-6)+\cdots+$$

$$(3^n-1)^2 = - \left[\frac{3^n-3}{2} \cdot 2 + \frac{3^n-3}{2} \cdot \left(\frac{3^n-3}{2} \right) \right] + (3^n-1)^2 = - \left[3^n-3 + \frac{3^n-3}{2} \cdot \left(\frac{3^n-3}{2} \right) \right] + (3^n-1)^2 = -\frac{1}{4}(3^n-1)(3^n-3)+(3^n-1)^2.$$

集合 B_m 中元素的个数利用分层区间法,划分为 $[1, 3^1-1], [3^1, 3^2-1], \cdots, [3^{k-1}, 3^k-1]$ 进行考虑,当 $m \in [3^{k-1}, 3^k-1], k \in \mathbb{N}_+$ 时, B_m 的元素个数为 k .

$$\sum_{m=1}^{3^1-1} (-1)^m (2m) \cdot 1 + \sum_{m=3^1}^{3^2-1} (-1)^m (2m) \cdot 2 + \cdots + \sum_{m=3^{k-1}}^{3^k-1} (-1)^m (2m) \cdot k = \sum_{k=1}^n \sum_{m=3^{k-1}}^{3^k-1} (-1)^m (2m) \cdot k = \sum_{m=3^{k-1}}^{3^k-1} (-1)^m (2m) \cdot k = k \left[(-2 \cdot 3^{k-1}) + 2(3^{k-1}+1) - 2(3^{k-1}+2) + 2(3^{k-1}+3) - \cdots + 2(3^k-1) \right] = 2k(-3^{k-1}+3^{k-1}+1-3^{k-1}-2+3^{k-1}+3-\cdots+3^{k-1}+2 \cdot 3^{k-1}-1) = 2k[(-3^{k-1}+3^{k-1}-\cdots-3^{k-1}+3^{k-1}) + (1-2+3-\cdots+2 \cdot 3^{k-1}-1)] = 2k \left[0 + \left(1 + \frac{2 \cdot 3^{k-1}-1-1}{2} \right) \right] = 2k \cdot 3^{k-1},$$

$$\text{令 } T_n = \sum_{k=1}^n 2k \cdot 3^{k-1}, T_n = 2 \cdot 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3 \cdot 3^2 + \cdots + 2 \cdot n \cdot 3^{n-1}, 3T_n = 2 \cdot 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3^3 + \cdots + 2 \cdot (n-1) \cdot 3^{n-1} + 2 \cdot n \cdot 3^n, \text{两式作差得 } -2T_n = 2(1+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}) - 2n \cdot 3^n = 3^n(1-2n) - 1, \text{故 } T_n = \frac{1}{2} + \left(n - \frac{1}{2} \right) 3^n.$$

$$\text{综上, } \sum_{m=1}^{3^n-1} (-1)^m a_m c_m = -\frac{1}{4}(3^n-1)(3^n-3) + (3^n-1)^2 + \frac{1}{2} + \left(n - \frac{1}{2} \right) 3^n.$$

刷原创

1. B 【解析】: $\{a_n\}$ 是等差数列,且 $a_3+a_6+a_9=9, \therefore 3a_6=9, \therefore a_6=3$.
 $\therefore \{b_n\}$ 是等比数列,且 $b_3b_6b_9=64, \therefore b_6^3=64, \therefore b_6=4$.
 $\therefore a_2b_4b_8+b_4b_8a_{10}=b_4b_8(a_2+a_{10})=b_6^2 \cdot 2a_6=96$. 故选 B.

2. A 【解析】因为 $\{a_n\}$ 是等差数列,所以 S_3, S_6-S_3, S_9-S_6 成等差数列,设其

公差为 d ,
 设 $S_3=k$, 则 $S_6=4k, S_9-S_6=3k$,
 故公差 $d=3k-k=2k$,
 所以 $S_9-S_6=3k+2k=5k$,
 则 $S_9=4k+5k=9k$,
 故 $\frac{S_6}{S_9}=\frac{4k}{9k}=\frac{4}{9}$.

又因为 $\{b_n\}$ 是等比数列,且 $T_{2n} \neq 0$, 所以 T_2, T_4-T_2, T_6-T_4 成等比数列,设其公比为 q ,
 设 $T_2=m$, 则 $T_4=3m, T_6-T_4=2m$,
 故公比 $q=\frac{2m}{m}=2$,
 所以 $T_6-T_4=2m \times 2=4m$,
 则 $T_6=3m+4m=7m$,
 故 $\frac{T_4}{T_6}=\frac{3m}{7m}=\frac{3}{7}$,
 所以 $\frac{S_6}{S_9} \cdot \frac{T_4}{T_6}=\frac{4}{9} \times \frac{3}{7}=\frac{12}{63}=\frac{4}{21}$.

故选 A.

3. 2 【解析】项目 A (等差数列): 由 $a_1=1, a_3=5$ 得公差 $d=\frac{a_3-a_1}{2}=2$,
 前 n 项和 $S_n=\frac{[1+2(n-1)] \cdot n}{2}=n^2$.

项目 B (等比数列): 由 $b_1=2, b_4=16$ 得公比 $q=\sqrt[3]{\frac{b_4}{b_1}}=2$,
 通项公式为 $b_n=2^n$.
 令 $S_n=b_n$, 即 $n^2=2^n$,
 $n=1$ 时, $1 \neq 2$,
 $n=2$ 时, $4=4$,
 $n=3$ 时, $9 \neq 8$,
 $n=4$ 时, $16=16$,
 $n \geq 5$ 时, 指数增长远快于平方增长, 无相等情况.

故满足条件的 n 共有 2 个.

4. 【解】 (1) 由已知得 $2a=4$, 所以 $a=2$,
 原点 O 到直线 $y=x+\sqrt{2}$ 的距离为 $b=\frac{|0-0+\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=1$,
 所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2) (i) 当过点 $P(-2, 1)$ 的直线斜率不存在时,
 直线与椭圆 E 只有 1 个交点, 舍去.
 设直线 l 的方程为 $y-1=k(x+2)$,
 设 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$,
 由 $\begin{cases} y-1=k(x+2) \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$,
 消去 y 整理得 $(1+4k^2)x^2+(16k^2+8k)x+16k^2+16k=0$,

所以 $\Delta=(16k^2+8k)^2-4(1+4k^2)(16k^2+16k)>0$, 解得 $k<0$,
 $x_1+x_2=-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}, x_1x_2=\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}$,
 直线 BC 的方程为 $y-1=\frac{y_1-1}{x_1}x$,
 令 $y=0$, 得 $x_M=\frac{x_1}{1-y_1}=\frac{x_1}{-k(x_1+2)}$,
 同理可得 $x_N=\frac{x_2}{1-y_2}=\frac{x_2}{-k(x_2+2)}$,
 $x_M+x_N=\frac{x_1}{-k(x_1+2)}+\frac{x_2}{-k(x_2+2)}=\frac{x_1(x_2+2)+x_2(x_1+2)}{-k(x_1+2)(x_2+2)}=\frac{2x_1x_2+2(x_1+x_2)}{-k[x_1x_2+2(x_1+x_2)+4]}=2 \cdot \frac{16k^2+16k}{1+4k^2}+2\left(-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}\right)=\frac{16k}{1+4k^2}$,
 $x_1x_2+2(x_1+x_2)+4=\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}+2\left(-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}\right)+4=\frac{4}{1+4k^2}$.

所以 $x_M+x_N=\frac{16k}{-4k}=-4=2x_A$,
 所以 M, A, N 的横坐标成等差数列.
 实际意义:
 为信号接收点位的布设提供了明确的几何依据, 无需随运维线路的调整反复测算点位, 只需以基准设备 A 为对称中心布设, 即可实现信号点位的均匀分布, 从根源上避免了单侧信号盲区或覆盖偏斜, 保障了智慧交通监测信号传输的均衡性与稳定性.

(ii) 由 (i) 知 A 为线段 MN 的中点, 得 $|MN|=2|AN|$,

所以 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BMD}}=\frac{\frac{1}{2}|AN| \cdot |y_B-y_D|}{\frac{1}{2}|MN| \cdot |y_B-y_D|}=\frac{|AN|}{|MN|}=\frac{1}{2}$,
 所以 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BMD$ 的面积之比为定值.

智慧交通点位优化建议 (答案供参考, 言之有理即可):
 以左端点设备 A 为对称基准布设地面接收点 M, N , 利用点位对称与面积比恒定的特性, 统一信号覆盖范围与传输参数, 简化设备调试流程, 保障监测信号传输的均衡性与稳定性, 降低运维成本.

所以 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BMD}}=\frac{\frac{1}{2}|AN| \cdot |y_B-y_D|}{\frac{1}{2}|MN| \cdot |y_B-y_D|}=\frac{|AN|}{|MN|}=\frac{1}{2}$,
 所以 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BMD$ 的面积之比为定值.

智慧交通点位优化建议 (答案供参考, 言之有理即可):
 以左端点设备 A 为对称基准布设地面接收点 M, N , 利用点位对称与面积比恒定的特性, 统一信号覆盖范围与传输参数, 简化设备调试流程, 保障监测信号传输的均衡性与稳定性, 降低运维成本.

所以 $\Delta=(16k^2+8k)^2-4(1+4k^2)(16k^2+16k)>0$, 解得 $k<0$,
 $x_1+x_2=-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}, x_1x_2=\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}$,
 直线 BC 的方程为 $y-1=\frac{y_1-1}{x_1}x$,
 令 $y=0$, 得 $x_M=\frac{x_1}{1-y_1}=\frac{x_1}{-k(x_1+2)}$,
 同理可得 $x_N=\frac{x_2}{1-y_2}=\frac{x_2}{-k(x_2+2)}$,
 $x_M+x_N=\frac{x_1}{-k(x_1+2)}+\frac{x_2}{-k(x_2+2)}=\frac{x_1(x_2+2)+x_2(x_1+2)}{-k(x_1+2)(x_2+2)}=\frac{2x_1x_2+2(x_1+x_2)}{-k[x_1x_2+2(x_1+x_2)+4]}=2 \cdot \frac{16k^2+16k}{1+4k^2}+2\left(-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}\right)=\frac{16k}{1+4k^2}$,
 $x_1x_2+2(x_1+x_2)+4=\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}+2\left(-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}\right)+4=\frac{4}{1+4k^2}$.

所以 $x_M+x_N=\frac{16k}{-4k}=-4=2x_A$,
 所以 M, A, N 的横坐标成等差数列.

实际意义:
 为信号接收点位的布设提供了明确的几何依据, 无需随运维线路的调整反复测算点位, 只需以基准设备 A 为对称中心布设, 即可实现信号点位的均匀分布, 从根源上避免了单侧信号盲区或覆盖偏斜, 保障了智慧交通监测信号传输的均衡性与稳定性.

(ii) 由 (i) 知 A 为线段 MN 的中点, 得 $|MN|=2|AN|$,

所以 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BMD}}=\frac{\frac{1}{2}|AN| \cdot |y_B-y_D|}{\frac{1}{2}|MN| \cdot |y_B-y_D|}=\frac{|AN|}{|MN|}=\frac{1}{2}$,
 所以 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BMD$ 的面积之比为定值.

智慧交通点位优化建议 (答案供参考, 言之有理即可):
 以左端点设备 A 为对称基准布设地面接收点 M, N , 利用点位对称与面积比恒定的特性, 统一信号覆盖范围与传输参数, 简化设备调试流程, 保障监测信号传输的均衡性与稳定性, 降低运维成本.

所以 $x_M+x_N=\frac{16k}{-4k}=-4=2x_A$,
 所以 M, A, N 的横坐标成等差数列.

实际意义:
 为信号接收点位的布设提供了明确的几何依据, 无需随运维线路的调整反复测算点位, 只需以基准设备 A 为对称中心布设, 即可实现信号点位的均匀分布, 从根源上避免了单侧信号盲区或覆盖偏斜, 保障了智慧交通监测信号传输的均衡性与稳定性.

(ii) 由 (i) 知 A 为线段 MN 的中点, 得 $|MN|=2|AN|$,

所以 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BMD}}=\frac{\frac{1}{2}|AN| \cdot |y_B-y_D|}{\frac{1}{2}|MN| \cdot |y_B-y_D|}=\frac{|AN|}{|MN|}=\frac{1}{2}$,
 所以 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BMD$ 的面积之比为定值.

智慧交通点位优化建议 (答案供参考, 言之有理即可):
 以左端点设备 A 为对称基准布设地面接收点 M, N , 利用点位对称与面积比恒定的特性, 统一信号覆盖范围与传输参数, 简化设备调试流程, 保障监测信号传输的均衡性与稳定性, 降低运维成本.

所以 $x_M+x_N=\frac{16k}{-4k}=-4=2x_A$,
 所以 M, A, N 的横坐标成等差数列.

实际意义:
 为信号接收点位的布设提供了明确的几何依据, 无需随运维线路的调整反复测算点位, 只需以基准设备 A 为对称中心布设, 即可实现信号点位的均匀分布, 从根源上避免了单侧信号盲区或覆盖偏斜, 保障了智慧交通监测信号传输的均衡性与稳定性.

(ii) 由 (i) 知 A 为线段 MN 的中点, 得 $|MN|=2|AN|$,

所以 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BMD}}=\frac{\frac{1}{2}|AN| \cdot |y_B-y_D|}{\frac{1}{2}|MN| \cdot |y_B-y_D|}=\frac{|AN|}{|MN|}=\frac{1}{2}$,
 所以 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BMD$ 的面积之比为定值.

智慧交通点位优化建议 (答案供参考, 言之有理即可):
 以左端点设备 A 为对称基准布设地面接收点 M, N , 利用点位对称与面积比恒定的特性, 统一信号覆盖范围与传输参数, 简化设备调试流程, 保障监测信号传输的均衡性与稳定性, 降低运维成本.

所以 $x_M+x_N=\frac{16k}{-4k}=-4=2x_A$,
 所以 M, A, N 的横坐标成等差数列.

实际意义:
 为信号接收点位的布设提供了明确的几何依据, 无需随运维线路的调整反复测算点位, 只需以基准设备 A 为对称中心布设, 即可实现信号点位的均匀分布, 从根源上避免了单侧信号盲区或覆盖偏斜, 保障了智慧交通监测信号传输的均衡性与稳定性.